INLEIDING ALGEBRAÏSCHE MEETKUNDE

Vrije Universiteit Brussel
Ba3 Wiskunde

door Theo Raedschelders

Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1

Inleiding

Algebraïsche meetkunde kan gezien worden als een combinatie van *lineaire algebra* en *ring- en moduultheorie*:

(1) In de lineaire algebra heb je stelsels van lineaire vergelijkingen in meerdere variabelen bestudeerd.
(2) In de ring- en moduultheorie heb je (onder andere) de veeltermring $K[x_1, \ldots, x_n]$ over een lichaam K bestudeerd.

In de algebraïsche meetkunde bestuderen we de oplossingenverzamelingen $V(S)$ van stelsels van veeltermvergelijkigen

$$S := \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \end{cases} \tag{1.0.1}$$

in meerdere variabelen. In tegenstelling tot bij lineaire algebra kunnen we echter niet verwachten al de oplossingen van zo'n stelsel expliciet neer te schrijven.

Voorbeeld 1.0.1. Als $f \in \mathbb{C}[x]$ een veelterm in 1 variabele met complexe coefficienten is, dan is het in het algemeen onmogelijk om expliciet alle oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$ neer te schrijven, indien de graad van f groter is dan 4. Dit zullen jullie bewijzen in de cursus Galoistheorie.

Om die reden zullen we mikken op een meer kwalitatieve beschrijving van de oplossingen van een dergelijk stelsel. We kunnen er het voorbeeld terug bij nemen: ook al kunnen we de oplossingen van $f(x) = 0$ niet exact bepalen, we weten wel door de fundamentele stelling van de algebra dat het aantal oplossingen (geteld met multipliceit) exact de graad van f is (we veronderstellen hier dat f niet constant is). Drie evidente vragen die we over een algemeen stelsel S zoals in (1.0.1) kunnen stellen zijn:

(1) basis: kunnen we S vervangen door een eindig stelsel met dezelfde oplossingenverzameling?
(2) existentie: is er een criterium voor het bestaan van oplossingen, m.a.w. wanneer geldt $V(S) \neq \varnothing$?

(3) dimensie: als er oplossingen bestaan, hoeveel vrijheidsgraden heeft de oplossingsruimte dan?

Behalve lineaire algebra en ring- en moduultheorie, is de algebraïsche meetkunde ook met andere takken van de wiskunde verweven. Ze is bijvoorbeeld in staat de “topologische” structuur van de oplossingen te beschrijven (dimensie, samenhangendheid, ...), en is daarom gerelateerd aan topologie en differentiaalmeetkunde. Daarenboven is de oplossingenverzameling van een stelsel veeltermvergelijkingen niet noodzakelijk glad. Sterker nog, zelfs indien je enkel geinteresseerd zou zijn in gladde objecten, is het vaak nuttig, en soms zelfs noodzakelijk, om met niet-gladde (of singuliere) objecten te werken. Dit brengt de algebraïsche meetkunde dan weer in verband met singulariteitentheorie.

Het lijkt misschien erg restrictief om enkel oplossingenverzamelingen van stelsels veeltermvergelijkingen te bekijken, en niet van stelsels die bestaan uit meer algemene functies (cosinussen, sinussen, ...). Er bestaat echter een diepe stelling, die onder de naam GAGA bekend staaat, die zegt dat zolang de oplossingenverzameling compact is, we geen nieuwe objecten verkrijgen indien we holomorfe vergelijkingen[1] zouden toelaten.

Het onderliggende idee van algebraïsche meetkunde kunnen we illustreren aan de hand van het volgende eenvoudige voorbeeld:

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = x^2\}. \tag{1.0.2}$$

In $\mathbb{R}^2$ weten we dat deze verzameling een parabool beschrijft. In deze cursus zullen we echter (voor redenen die later duidelijk worden) altijd met de complexe getallen werken, en we willen dus de oplossingenverzamelingen in $\mathbb{C}^2$ begrijpen. De ruimte $\mathbb{C}^2$ is 4-dimensionaal als reële ruimte, en (1.0.2) beschrijft hierin een twee-dimensionale deelruimte. Dit is wat moeilijker te visualiseren, maar in eerste instantie denken we eraan als een parabool (dit is enkel voor intuitie!). In de algebraïsche meetkunde zullen we met de verzameling P een commutative ring associeren, namelijk

$$A(P) := \mathbb{C}[x, y]/(y - x^2) \cong \mathbb{C}[x],$$

die we de coordinatenring van P noemen, en proberen we meetkundige vragen over de parabool P te vertalen naar algebraïsche vragen over de ring $A(P)$. Die algebraïsche vragen kunnen we vaak met behulp van technieken uit de commutatieve algebra oplossen, en het antwoord kunnen we dan weer terug vertalen naar een meetkundig statement. Een groot deel van de cursus is dan ook gewijd aan het precies maken van dit “woordenboek” tussen meetkunde en algebra.

[1] Dit zijn complexwaardige functies in meerdere complexe variabelen die complex differentieerbaar zijn in een omgeving van ieder punt. Wat dit precies betekent zie je in de cursus complexe analyse.

1.1. Conventies

Stel K een lichaam. In deze nota's zijn alle ringen commutatief met eenheid. Als I een (noodzakelijk tweezijdig) ideaal is in een commutatieve ring R, dan noteren we dit als $I \trianglelefteq R$. Met $K[x_1, \ldots, x_n]$ noteren we de veeltermring in n variabelen, dus elementen bestaan uit eindige formele sommen

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

met alle $a_{i_1,\ldots,i_n} \in K$, en met de voor de hand liggende som en product van veeltermen. We gebruiken vaak definities en resultaten uit de cursus Ring- en Moduultheorie, zie Bijlage A voor een samenvatting.

HOOFDSTUK 2

Affiene variëteiten

2.1. Affiene algebraïsche verzamelingen

We noemen

$$\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_K := \{(c_1, \ldots, c_n) \mid \forall i = 1, \ldots, n : c_i \in K\}$$

de affiene n-dimensionale ruimte.

Opmerking 2.1.1. Als verzameling is $\mathbb{A}^n$ gewoon gelijk aan K^n. Het is typisch om hier echter twee verschillende notaties te gebruiken omdat we meestal aan K^n denken als vectorruimte, en we willen deze structuur negeren voor $\mathbb{A}^n$.

Voor een punt $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{A}^n$ en een veelterm

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n],$$

definieren we de waarde van f in c als

$$f(c) := \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n} c_1^{i_1} \cdots c_n^{i_n} \in K.$$

Als er geen verwarring mogelijk is zullen we een punt in $\mathbb{A}^n$ voorstellen met dezelfde letter x die we gebruiken voor de formele variabelen.

Voor een deelverzameling $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ noemen we

$$V(S) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S : f(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$$

de nulpuntenverzameling van S.

Definitie 2.1.2. Een verzameling $X \subset \mathbb{A}^n$ van de vorm $X = V(S)$ voor een deelverzameling $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ noemen we een (affiene) algebraïsche verzameling.

Opmerking 2.1.3. Niet iedere deelverzameling van $\mathbb{A}^n$ is algebraïsch (zie oefeningen).

Een algebraïsche verzameling is per definitie de oplossingenverzameling van een (mogelijk oneindig) stelsel veeltermvergelijkingen. Als $S = \{f_1, \ldots f_k\}$ een eindige verzameling is, dan noteren we ook $V(S) = V(f_1, \ldots, f_n)$.

Opmerking 2.1.4. In de literatuur kom je ook soms de naam affiene varieteit tegen, maar wij zullen die term enkel gebruiken voor algebraïsche verzamelingen met een extra eigenschap (zie later).

VOORBEELD 2.1.5. (1) $\mathbb{A}^n$ en de lege verzameling $\varnothing$ zijn algebraïsche verzamelingen, omdat $\mathbb{A}^n = V(0)$ en $\varnothing = V(1)$.
(2) Een punt $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{A}^n$ is een algebraïsche verzameling omdat $\{x\} = V(x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)$.
(3) Lineaire deelruimten van $\mathbb{A}^n = K^n$ zijn algebraïsche verzamelingen.
(4) Als $X \subset \mathbb{A}^n$ en $Y \subset \mathbb{A}^m$ algebraïsche verzamelingen zijn, dan is hun product $X \times Y \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ ook een algebraïsche verzameling.

EIGENSCHAP 2.1.6. (1) *$S \subset S' \subset K[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow V(S') \subset V(S)$.*
(2) *Als $I = (S)$ het ideaal is voortgebracht door $S \subset K[x_1, \dots, x_n]$, dan is $V(I) = V(S) \subset \mathbb{A}^n$.*

BEWIJS. Punt (1) is duidelijk. We bewijzen dus enkel (2). Uit (1) volgt dat $V(I) \subset V(S)$. Neem nu een $p \in V(S)$, en $g \in I$. Dan kan g geschreven worden als

$$g = a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k,$$

met alle $f_i \in S$ en alle $a_i \in K[x_1, \dots, x_n]$. Bijgevolg is

$$g(p) = a_1(p) f_1(p) + \cdots + a_k(p) f_k(p) = 0,$$

en dus geldt dat $p \in V(g)$. Hieruit volgt dus dat $V(S) \subset V(I)$. $\square$

We leiden hieruit af dat de verzameling $S \subset K[x_1, \dots, x_n]$ die een algebraïsche verzameling $X = V(S)$ bepaalt helemaal niet uniek is.

VOORBEELD 2.1.7. Stel dat $X \subset \mathbb{A}^1$ een algebraïsche verzameling is. Dan weten we van Eigenschap 2.1.6 dat $X = V(I)$, voor een ideaal I in $K[x]$. Maar van ring- en moduultheorie weten we dat $K[x]$ een hoofdideaaldomein is, dus $I = (f)$, voor een $f \in K[x]$, en dus $X = V(f)$. Aangezien een niet-nulle polynoom in 1 variabele altijd maar een eindig aantal nulpunten heeft, bestaat iedere algebraïsche verzameling in $\mathbb{A}^1$ die niet gelijk is aan $\mathbb{A}^1$ uit een eindig aantal elementen. Omgekeerd is iedere eindige deelverzameling $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{A}^1$ een algebraïsche verzameling omdat $\{a_1, \dots, a_n\} = V((x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n))$. We besluiten hieruit dat de algebraïsche verzamelingen van $\mathbb{A}^1$ net de eindige verzamelingen en $\mathbb{A}^1$ zelf zijn.

Spijtig genoeg werkt deze strategie niet om de algebraïsche delen van $\mathbb{A}^n$ met $n > 1$ te beschrijven, omdat $K[x_1, \dots, x_n]$ dan geen hoofideaaldomein is.

We kunnen echter wel gebruik maken van een ander resultaat uit ring- en moduultheorie. Herinner de volgende definitie.

DEFINITIE 2.1.8. Een ring R wordt noethers genoemd als iedere stijgende keten

$$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_m \subset \cdots$$

van idealen stationair is. Dit betekent dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$\forall k \geq n : I_k = I_n.$$

STELLING 2.1.9 (Basisstelling van Hilbert). *Als een ring R noethers is, dan is ook $R[x]$ noethers.*

Deze stelling impliceert dat iedere algebraïsche verzameling de nulpuntenverzameling is van een eindig aantal veeltermen.

EIGENSCHAP 2.1.10. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een algebraïsche verzameling. Dan bestaan er een eindig aantal veeltermen $f_1, \ldots, f_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zodat*

$$X = V(f_1, \ldots, f_r).$$

BEWIJS. Stel $X = V(S)$, met $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. Dan weten we van Eigenschap 2.1.6(2) dat $V(S) = V(I)$, met $I = (S)$ een ideaal in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Uit de basisstelling van Hilbert weten we dat $K[x_1, \ldots, x_n]$ noethers is. In een noetherse ring is ieder ideaal eindig voortgebracht (zie ring- en moduultheorie), en dus geldt er dat $I = (f_1, \ldots, f_r)$, met alle $f_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Dan is $X = V(S) = V(I) = V(f_1, \ldots, f_r)$. Klaar! $\square$

Merk op dat deze stelling een positief antwoord geeft op vraag (1) uit de inleiding. Zie [**Hil90**] voor Hilberts oorspronkelijke bewijs.

2.2. Het ideaal horend bij een stel nulpunten

Eigenschap 2.1.6 is in zekere zin de basis van de algebraïsche meetkunde, aangezien ze meetkundige objecten (affiene algebraïsche verzamelingen) in verband brengt met algebraïsche objecten (idealen in een veeltermring). We hebben al gezien hoe we aan een ideaal een algebraïsche verzameling toekennen, en nu zullen we het omgekeerde doen.

DEFINITIE 2.2.1. Stel $X \subset \mathbb{A}^n$. Dan noemen we

$$I(X) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall x \in X : f(x) = 0\}.$$

het ideaal horende bij X.

EIGENSCHAP 2.2.2. *Voor $X \subset \mathbb{A}^n$, is $I(X)$ een ideaal in $K[x_1, \ldots, x_n]$.*

BEWIJS. Als $f, g \in I(X)$, en $x \in X$, dan geldt $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 0$, dus $f + g \in I(X)$. Als $r \in K[x_1, \ldots, x_n], f \in I(X)$ en $x \in X$, dan geldt $(rf)(x) = r(x)f(x) = r(x) \cdots 0 = 0$, dus $rf \in I(X)$. Dus $I(X)$ is inderdaad een ideaal in $K[x_1, \ldots, x_n]$. $\square$

VOORBEELD 2.2.3. Als $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ een punt is, dan is $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = I(\{a\})$. Inderdaad, als $f \in I(\{a\})$, dan is $f(a) = 0$. Definieer $u_i := x_i - a_i$ en de veelterm

$$g(u_1, \ldots, u_n) := f(a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Dan is $g(0, \ldots, 0) = 0$. Schrijf nu $g = g_0 + \cdots + g_d$ waarbij g_i het stuk van g van graad i is. Dan is $g_0 = 0$, en alle termen $g_1, \ldots, g_d$ zijn deelbaar door ten minste een u_i, en dus is $g \in (u_1, \ldots, u_n) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Omgekeerd, als $f \in (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, dan is $f = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) f_i$ voor zekere $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$, en dus is $f(a) = 0$ of met andere woorden: $f \in I(\{a\})$.

We hebben dus afbeeldingen gedefinieerd:
(2.2.1)

$$\{\text{algebraïsche verzamelingen in } \mathbb{A}^n\} \rightleftarrows \{\text{idealen in } K[x_1, \ldots, x_n]\}$$

$$X \longmapsto I(X)$$

$$V(J) \longleftarrow\!\shortmid\; J$$

en zullen nu nagaan of deze correspondentie tussen idealen en algebraïsche verzamelingen een bijectie geeft. Het volgende lemma geeft de positieve resultaten in deze richting.

Lemma 2.2.4. *Stel $S, S' \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ en $X, X' \subset \mathbb{A}^n$.*

(1) $X \subset X' \Rightarrow I(X') \subset I(X)$
(2) $S \subset S' \Rightarrow V(S') \subset V(S)$
(3) $X \subset V(I(X))$ *en* $S \subset I(V(S))$
(4) *Als X een algebraïsche verzameling is, dan $V(I(X)) = X$.*

Bewijs. (1) is duidelijk, en (2) hebben we al gezien in Eigenschap 2.1.6, dus we beginnen met (3):

$$p \in X \Rightarrow \forall f \in I(X) : f(p) = 0 \Rightarrow p \in V(I(X))$$

en analoog hebben we

$$f \in S \Rightarrow \forall p \in V(S) : f(p) = 0 \Rightarrow f \in I(V(S)).$$

Nu bewijzen we (4). Door (3) is het voldoende te bewijzen dat $V(I(X)) \subset X$. Aangezien X algebraïsch is, geldt $X = V(S)$, voor een zekere $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. Door het tweede deel van (3) weten we dat $S \subset I(V(S))$ en dus $V(I(X)) = V(I(V(S))) \subset V(S) = X$ door (2). Klaar! $\square$

We zien dat (2.2.1) bijna een bijectie geeft. Het enige dat we nog missen hiervoor is $I(V(J)) \subset J$ voor een ideaal J in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Spijtig genoeg geldt deze inclusie niet voor ieder ideaal J.

Les 1

Definitie 2.2.5. Een lichaam K heet algebraïsch gesloten als iedere niet-constante veelterm in $K[x]$ een product is van lineaire veeltermen.

Voorbeeld 2.2.6. (1) Stel $J \trianglelefteq \mathbb{C}[x]$ een niet-nul ideaal. Aangezien $\mathbb{C}[x]$ een hoofdideaaldomein is en $\mathbb{C}$ algebraïsch gesloten is, weten we dat

$$J = (f) = \big((x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_n)^{k_n}\big),$$

voor zekere $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ allen verschillend, en $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dan is het duidelijk dat $V(J) = \{a_1, \dots, a_n\}$, maar

$$I(V(J)) = \big((x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)\big).$$

Als nu minstens één van de $k_i > 1$, dan zien we dat $I(V(J)) \not\subset J$. We zien dus dat **de nulpuntenverzameling van een ideaal geen machten van polynomen ziet**: een macht f^k van f heeft dezelfde nulpunten als f, en dus gaat de informatie over deze macht verloren als we $I(V(-))$ toepassen.

(2) De situatie is nog erger over lichamen die niet algebraïsch gesloten zijn, zoals $\mathbb{R}$. Inderdaad, het ideaal $J = (x^2 + 1) \trianglelefteq \mathbb{R}[x]$ heeft geen nulpunten in $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, dus $V(J) = \varnothing$, en $I(V(J)) = \mathbb{R}[x]$, dus ook hier geldt dat $I(V(J)) \not\subset J$, en we zien dat alle informatie over het ideaal J verloren gaat bij het toepassen van $I(V(-))$.

Het eerste probleem kunnen we ontwijken door enkel die idealen te beschouwen met de eigenschap dat ze f bevatten, telkens wanneer ze een macht f^k van f bevatten.

Definitie 2.2.7. Stel $I \trianglelefteq R$ een ideaal in een ring R. Dan noemen we

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in I\}$$

het radicaal van I.

Definitie 2.2.8. Een ideaal $I \trianglelefteq R$ in een ring R wordt een radicaal ideaal genoemd als $\sqrt{I} = I$.

Eigenschap 2.2.9. *Stel $I \trianglelefteq R$ een ideaal in een ring R.*

(1) *Het radicaal $\sqrt{I}$ is een radicaal ideaal in R dat I bevat.*
(2) *Als $R = K[x_1, \dots, x_n]$ en $I = I(X)$ voor een algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{A}^n$, dan is I een radicaal ideaal.*

Bewijs. We beginnen met (1). Om aan te tonen dat $\sqrt{I}$ een ideaal is tonen we het volgende aan:

(1) $f, g \in \sqrt{I} \Rightarrow f + g \in \sqrt{I}$: als $f, g \in \sqrt{I}$, dan bestaan er $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ zodat $f^n, g^m \in I$. Bekijk dan

$$(f+g)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} f^k g^{n+m-k},$$

en merk op dat in iedere term van het rechterlid ofwel de macht van f groter is dan n (zodat $f^k \in I$), ofwel de macht van g groter is dan m (zodat $g^{n+m-k} \in I$). Omdat I een ideaal is, zien we dus dat het rechterlid, en daarom ook het linkerlid, tot I behoren. We hebben dus aangetoond dat $f + g \in \sqrt{I}$.

(2) $r \in R, f \in \sqrt{I} \Rightarrow rf \in \sqrt{I}$: aangezien $f \in \sqrt{I}$, bestaat er een $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zodat $f^n \in I$, en dus

$$(rf)^n = r^n f^n \in I,$$

zodat $rf \in \sqrt{I}$.

We hebben dus aangetoond dat $\sqrt{I}$ een ideaal in R is. Bewijs zelf dat $\sqrt{I}$ een radicaal ideaal is dat I bevat.

We bewijzen nu (2). Door (1) is het voldoende te bewijzen dat $\sqrt{I} \subset I$. Als $f \in R$ en $f^n \in I$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dan volgt uit de definitie van $I = I(X)$ dat

$$\forall x \in X : f^n(x) = f(x)^n = 0,$$

en dus is ook $f(x) = 0$ (waarom?), met andere woorden $f \in I$. Klaar! □

Voorbeeld 2.2.10. We hernemen Voorbeeld (1). Het radicaal van het ideaal

$$J = ((x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_n)^{k_n}) \trianglelefteq \mathbb{C}[x]$$

bestaat uit alle veeltermen $f \in \mathbb{C}[x]$ zodat $(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_n)^{k_n}$ een zekere macht f^k van f deelt. Dit zijn net de veeltermen die iedere factor $x - a_i$ voor $i = 1, \ldots, n$ minstens één keer bevatten, dus

$$\sqrt{J} = \big((x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)\big).$$

In het algemeen is het moeilijk om radicalen van idealen uit te rekenen, en hiervoor worden typisch algoritmes van de computeralgebra gebruikt.

In het voorbeeld dat we beschouwd hebben merken we op dat $I(V(J)) = \sqrt{J}$. We zullen zien dat deze gelijkheid altijd geldt voor idealen in veeltermringen $K[x_1, \ldots, x_n]$ met K een algebraïsch gesloten lichaam. Om dit te bewijzen behandelen we eerst een stukje commutatieve algebra.

2.3. Integrale uitbreidingen en Noethers normalisatielemma

In deze sectie bewijzen we het normalisatielemma van Noether [**Noe26**]. Voor de volgende definities veronderstellen we dat R, S twee ringen zijn zodat $R \subset S$.

Definitie 2.3.1. We zeggen dat S eindig voortgebracht is als R-moduul, of dat S eindig is over R, indien er een eindig aantal elementen $s_1, \ldots, s_n \in S$ bestaan, zodat ieder element $s \in S$ te schrijven is als

$$s = r_1 s_1 + \cdots + r_k s_k,$$

voor zekere $r_1, \ldots, r_k \in R$. Soms schrijft men dit ook als

$$S = Rs_1 + \cdots + Rs_k.$$

We noemen $s_1, \ldots, s_k$ de voortbrengers van S als R-moduul.

Definitie 2.3.2. We zeggen dat S eindig voortgebracht is als R-algebra indien er een eindig aantal elementen $s_1, \ldots, s_n \in S$ bestaan, zodat ieder element $s \in S$ te schrijven is als

$$s = \sum_{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}} r_{i_1, \ldots, i_n} s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n},$$

voor zekere $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ en $r_{i_1,\ldots,i_n} \in R$. We noemen $s_1, \ldots, s_n$ de voortbrengers van S als R-algebra.

Opmerking 2.3.3. Let goed op het verschil tussen eindig voortgebracht zijn als moduul en als algebra!

Stel $v_1, \ldots, v_l \in S$. Dan bestaat er een uniek ringmorfisme

$$v : R[x_1, \ldots, x_l] \longrightarrow S : x_i \mapsto v_i, \tag{2.3.1}$$

en we noteren $R[v_1, \ldots, v_l] := \mathrm{im}(v)$ voor het beeld van v. We noemen $R[v_1, \ldots, v_l]$ de ring voortgebracht door R en $v_1, \ldots, v_l$. Het is de kleinste R-deelalgebra van S die $v_1, \ldots, v_l$ bevat. Als R-moduul wordt $R[v_1, \ldots, v_l]$ voortgebracht door

$$\{v_1^{i_1} \cdots v_l^{i_l} \mid i_1, \ldots, i_l \in \mathbb{N}\}.$$

Als $S = R[v_1, \ldots, v_l]$, dan is S dus eindig voortgebracht als R-algebra door $v_1, \ldots, v_l$. Let goed op met deze notatie: de ring $R[v_1, \ldots, v_l]$ is niet noodzakelijk isomorf met een veeltermring in l variabelen over R.

Definitie 2.3.4. Als $v_1, \ldots, v_l \in S$ en voor iedere veelterm $0 \neq f \in R[x_1, \ldots, x_l]$ geldt er dat $f(v_1, \ldots, v_l) \neq 0$, dan zeggen we dat $v_1, \ldots, v_l$ algebraïsch onafhankelijk zijn over R.

Als $v_1, \ldots, v_l \in S$ algebraïsch onafhankelijk zijn over R, dan is de kern van (2.3.1) triviaal, en is $R[v_1, \ldots, v_l]$ dus wel isomorf met een veeltermring in l variabelen over R.

Definitie 2.3.5. Een element $s \in S$ noemen we integraal over R als er een niet-nulle monische veelterm

$$f(x) = r_0 + r_1 x + \ldots + r_{n-1}x^{n-1} + x^n \in R[x]$$

bestaat[1] zodat

$$f(s) = r_0 + r_1 s + \ldots + r_{n-1}s^{n-1} + s^n = 0 \in S.$$

Als ieder element van S integraal is over R, dan zeggen we dat S integraal is over R, of dat S een integrale uitbreiding is van R.

Opmerking 2.3.6. Als R en S lichamen zijn, dan gebruikt men meestal de termen "algebraïsch element" en "algebraïsche uitbreiding" in plaats van integraal element en integrale uitbreiding. Een element dat niet algebraïsch is, wordt ook transcendent genoemd.

Om enkele basiseigenschappen over integrale uitbreidingen te bewijzen hebben we een veralgemening van de Cayley-Hamilton stelling nodig, die we zonder bewijs vermelden. Voor een ring R noteren we $M_n(R)$ de $n \times n$-matrix ring met coefficienten in R.

[1] Monisch wil zeggen dat de hoogstegraadscoefficient van deze veelterm gelijk is aan 1.

STELLING 2.3.7. [**Sta19**, Lemma 00DX] *Stel R een ring en $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$. Als $\chi(x) := \det(x \cdot \mathrm{id}_{n\times n} - A) \in R[x]$ de karakteristieke polynoom is van A, dan geldt er dat*

$$\chi(A) = 0 \in M_n(R).$$

EIGENSCHAP 2.3.8. *Stel $R \subset S$ en $s \in S$. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) *s is integraal over R*
(2) *$R[s]$ is eindig voortgebracht als R-moduul*
(3) *er bestaat een deelring R' van S zodat $R \subset R' \subset S$ met $s \in R'$ en R' eindig voortgebracht als R-moduul*

BEWIJS. (1) $\Rightarrow$ (2): als R-moduul wordt $R[s]$ voortgebracht door $1, s, \ldots, s^{n-1}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Stel $R' = R[s]$.
(3) $\Rightarrow$ (1): stel $R' = Ru_1 + \cdots + Ru_n$ met alle $u_i \in R'$ en

$$su_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j,$$

voor zekere $a_{ij} \in R$. Stelling 2.3.7 garandeert dat $\chi(A) = 0$, als we $A := (a_{ij}) \in M_n(R)$ stellen. Indien we A beschouwen als R-moduul afbeelding

$$A : R^{\oplus n} \longrightarrow R^{\oplus n} : (r_1, \ldots, r_n) \mapsto (\sum_{i=1}^{n} r_i a_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_i a_{in})$$

en een tweede R-moduul afbeelding

$$\pi : R^{\oplus n} \twoheadrightarrow R' : (r_1, \ldots, r_n) \mapsto r_1 u_1 + \ldots + r_n u_n$$

definieren, dan geldt er voor iedere $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{\oplus n}$ dat

$$\pi(A(\underline{r})) = s\pi(\underline{r}).$$

In het bijzonder zien we dat

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \chi(s) \cdot 1 \\ &= \chi(s)(r_1 u_1 + \ldots + r_n u_n) \\ &= \chi(s)(\pi(\underline{r})) \\ &= \pi(\chi(A)(\underline{r})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

voor zekere $r_1, \ldots, r_n \in R$, en dus is s integraal over R, aangezien $\chi(x) \in R[x]$ monisch is. $\square$

EIGENSCHAP 2.3.9. *Stel $R \subset S \subset T$ drie ringen. Als T eindig is over S en S is eindig over R, dan is T eindig over R*

BEWIJS. Stel $s_1, \ldots, s_k \in S$ voortbrengers van S als R-moduul, en $t_1, \ldots, t_l \in T$ voortbrengers van T als S-moduul. Dan is ieder element $t \in T$ van de vorm

$$t = \sum_{i=1}^{l} a_i t_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} r_{ij} s_j t_i,$$

met alle $a_i \in S$ en $r_{ij} \in R$. De producten $s_j t_i \in T$ vormen dus een eindig stel voortbrengers voor T als R-moduul. $\square$

Noethers normalisatielemma zegt dat iedere eindig voortgebrachte algebra S over een lichaam eindig is over een veeltermring voortgebracht door algebraïsch onafhankelijke elementen in S. Om dit te bewijzen hebben we twee technische lemma's nodig. Les 2

LEMMA 2.3.10. *Stel K een oneindig lichaam en $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ een homogene polynoom. Dan bestaan er $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ zodat $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.*

BEWIJS. We bewijzen dit lemma per inductie op n. Het geval $n = 1$ is triviaal, dus veronderstel dat $n > 1$ en schrijf

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i x_1^i,$$

met alle $f_i \in K[x_2, \ldots, x_n]$ homogeen van graad $d - i$. Omdat $f \neq 0$, is op zijn minst een van de $f_i \neq 0$, dus per inductie kunnen we $a_2, \ldots, a_{n-1}$ kiezen zodat $f_i(a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) \neq 0$. Maar dan is $f(x_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) \in K[x_1]$ een niet-nulle veelterm, en heeft dus maar een eindig aantal nulpunten. Omdat K oneindig is, kunnen we dus zeker een $a_1 \in K$ vinden zodat $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) \neq 0$. $\square$

LEMMA 2.3.11. *Stel $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ met K een oneindig lichaam. Dan bestaan er $\lambda \in K^\times$ en $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ zodat de veelterm*

$$\lambda f(y_1 + a_1 y_n, y_2 + a_2 y_n, \ldots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n) \in K[y_1, \ldots, y_n]$$

monisch is in y_n (beschouwd als element van $R[y_n]$ met $R = K[y_1, \ldots, y_{n-1}]$).

BEWIJS. Stel d gelijk aan de graad van f en veronderstel dat

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

De hoogstegraadsterm in y_n van

$$\begin{aligned} &\lambda f(y_1 + a_1 y_n, y_2 + a_2 y_n, \ldots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n) \\ &\qquad = \lambda \sum_{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1, \ldots, i_n} (y_1 + a_1 y_n)^{i_1} \cdots (y_{n-1} + a_{n-1} y_n)^{i_{n-1}} y_n^{i_n} \end{aligned}$$

bekomen we door telkens de tweede term tussen de haakjes te nemen en enkel de termen van graad d te bewaren. Deze is dus gelijk aan

$$\lambda \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}\\ i_1+\cdots+i_n=d}} a_{i_1,\ldots,i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2}\cdots a_{n-1}^{i_{n-1}} y_n^{i_1+\cdots+i_n} = \lambda f_d(a_1,\ldots,a_{n-1},1) y_n^d,$$

met f_d het homogene graad d gedeelte van f. Door Lemma 2.3.10 kunnen we $a_1,\ldots,a_{n-1}$ zo kiezen dat $f_d(a_1,\ldots,a_{n-1},1)\neq 0$. Het volstaat dan om $\lambda = f_d(a_1,\ldots,a_{n-1},1)^{-1}$ te stellen. Klaar! □

STELLING 2.3.12 (Noether normalisatielemma). *Stel S een niet-nulle eindig voortgebrachte algebra over een lichaam K met voortbrengers $s_1,\ldots,s_n \in S$ (dus $K[s_1,\ldots,s_n]=S$). Dan bestaat er een $d\geq 0$ en algebraïsch onafhankelijke elementen $v_1,\ldots,v_d\in S$ over K zodat S eindig is over $K[v_1,\ldots,v_d]$.*

BEWIJS. We bewijzen de stelling enkel in het geval K oneindig is. Het bewijs gaat per inductie op het aantal voortbrengers n van S. Het geval $n=0$ is triviaal, en dus veronderstellen we dat $n>0$ en onderscheiden twee gevallen:

(1) er bestaat geen niet-nulle veelterm f in n veranderlijken zodat $f(s_1,\ldots,s_n)=0$. Dan zijn de s_i dus algebraïsch onafhankelijk en kunnen we $d=n$ nemen en $v_i=s_i$.

(2) er bestaat wel een niet-nulle veelterm f in n veranderlijken zodat $f(s_1,\ldots,s_n)=0$. In dat geval kiezen we $\lambda\in K^\times$ en $a_1,\ldots,a_{n-1}\in K$ zoals in Lemma 2.3.11 en stellen we

$$\begin{cases} y_1 & := s_1 - a_1 s_n\\ y_2 & := s_2 - a_2 s_n\\ \vdots & \\ y_{n-1} & := s_{n-1}-a_{n-1}s_n\\ y_n & := s_n\end{cases}$$

Het is dan duidelijk (waarom?) dat $K[y_1,\ldots,y_n]=K[s_1,\ldots,s_n]=S$. Daarenboven is y_n integraal over de K-deelalgebra $K[y_1,\ldots,y_{n-1}]$ van S, aangezien

$$\lambda f(y_1+a_1y_n, y_2+a_2y_n,\ldots,y_{n-1}+a_{n-1}y_n, y_n) = \lambda f(s_1,\ldots,s_n)=0$$

monisch is in y_n. Eigenschap 2.3.8 zegt dan dat $K[y_1,\ldots,y_n]$ eindig is over $K[y_1,\ldots,y_{n-1}]$. Door de inductiehypothese bestaat er een $d\geq 0$ en algebraïsch onafhankelijke elementen $v_1,\ldots,v_d\in K[y_1,\ldots,y_{n-1}]$ zodat $K[y_1,\ldots,y_{n-1}]$ een eindige uitbreiding is van $K[v_1,\ldots,v_d]$. Uit Eigenschap 2.3.9 leiden we dus af dat $S=K[y_1,\ldots,y_n]$ eindig is over $K[v_1,\ldots,v_d]$. Klaar!

□

OPMERKING 2.3.13. Het bewijs voor het geval K eindig verloopt analoog, mits een kleine aanpassing van Lemma 2.3.11, zie bijvoorbeeld [**Sta19**, Lemma 00OX].

2.4. Hilberts Nullstellensatz

We zullen nu het normalisatielemma van Noether gebruiken om ons woordenboek preciezer te maken. Allereerst tonen we dat uit het normalisatielemma het zogenaamde lemma van Zariski [**Zar47**] volgt.

LEMMA 2.4.1. *Stel $R \subset S$ domeinen zodat S integraal is over R. Dan is R een lichaam enkel en alleen indien S een lichaam is.*

BEWIJS. Stel dat R een lichaam is en $0 \neq s \in S$. Aangezien S integraal is over R weten we dat

$$r_0 + r_1 s + \ldots + r_{n-1} s^{n-1} + s^n = 0$$

voor zekere $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$. Omdat S een domein is, mogen we veronderstellen dat $r_0 \neq 0$ en dus is

$$-r_0^{-1}(r_1 + r_2 s + \ldots + r_{n-1} s^{n-2} + s^{n-1}) \in S$$

een inverse voor s.

Omgekeerd, als S een lichaam is, en $0 \neq r \in R$, dan heeft r een inverse $r^{-1} \in S$. Aangezien S integraal is over R weten we dat

$$r_0 + r_1 r^{-1} + \ldots + r_{n-1} r^{-n+1} + r^{-n} = 0,$$

voor zekere $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$. Hieruit volgt dat

$$r^{-1} = -(r_{n-1} + r_{n-2} r + \ldots + r_0 r^{n-1}) \in R.$$

□

STELLING 2.4.2 (Lemma van Zariski). *Stel $K \subset L$ lichamen, zodat L eindig voortgebracht is als K-algebra. Dan is L eindig over K.*

BEWIJS. Door Stelling 2.3.12 weten we dat L eindig is over een veeltermring $K[x_1, \ldots, x_d]$. Uit Eigenschap 2.3.8 leiden we dan af dat L integraal is over $K[x_1, \ldots, x_d]$, en aangezien L en $K[x_1, \ldots, x_d]$ beide domeinen zijn, volgt uit Lemma 2.4.1 dat $K[x_1, \ldots, x_d]$ een lichaam is. Dit is enkel mogelijk indien $d = 0$. Klaar! □

Met behulp van deze stelling kunnen we nu vraag (2) uit de inleiding beantwoorden.

GEVOLG 2.4.3 (Zwakke Nullstellensatz). *Stel K een algebraïsch gesloten lichaam. Als $J \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$, dan geldt*

$$V(J) \neq \varnothing \Leftrightarrow 1 \notin J.$$

BEWIJS. $\Rightarrow$: als $1 \in J$, dan $V(J) \subset V(1) = \varnothing$.

$\Leftarrow$: als $1 \notin J$, dan is J een echt ideaal in $K[x_1, \ldots, x_n]$, en dus bestaat er een maximaal ideaal $\mathfrak{m}$ dat J bevat. Door Eigenschap 2.1.6(1) geldt er dat $V(\mathfrak{m}) \subset V(J)$. Het is dus voldoende te bewijzen dat $V(\mathfrak{m}) \neq \varnothing$. Het quotient $L = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$ is een lichaam dat eindig voortgebracht is als K-algebra door $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$. Volgens Stelling 2.4.2 is L dus eindig over K en uit Eigenschap 2.3.8 volgt dat ieder element $l \in L$ algebraïsch is over K, dus er bestaat een monische veelterm $f(x) \in K[x]$ zodat $f(l) = 0$. Maar omdat K algebraïsch gesloten is, is $f(x)$ te schrijven als product van lineaire factoren

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_d)^{k_d},$$

met $a_i \in K$. Dus is

$$f(l) = (l - a_1)^{k_1} \cdots (l - a_d)^{k_d} = 0,$$

en is $l = a_i \in K$, voor een zekere i. Anders gezegd, de natuurlijke afbeelding

$$K \longrightarrow K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$$

is een isomorfisme. Door inverse beelden $a_1, \ldots, a_n$ van de klassen $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ te kiezen, zien we dat $\overline{x_i} = \overline{a_i}$ voor alle i, en dus

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset \mathfrak{m}.$$

Aangezien $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ een maximaal ideaal is (waarom?), krijgen we $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = \mathfrak{m}$, en dus $V(\mathfrak{m}) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$. Klaar! $\square$

Dit is de reden voor de naam Nullstellensatz: het gevolg zegt dat zolang 1 niet in het ideal voortgebracht door een willekeurig stelsel veeltermvergelijkingen (met coefficienten in een algebraïsch gesloten lichaam) zit, het stelsel minstens één oplossing heeft.

Stelling 2.4.4 (Sterke Nullstellensatz). *Stel K een algebraïsch gesloten lichaam. Dan geldt voor ieder ideaal $J \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ dat $I(V(J)) = \sqrt{J}$. In het bijzonder is er een inclusie-omkerende bijectie*

$$\{\textit{algebraïsche verzamelingen in } \mathbb{A}^n\} \rightleftarrows \{\textit{radicale idealen in } K[x_1, \ldots, x_n]\}$$

$$X \longrightarrow I(X)$$

$$V(J) \longleftarrow J$$

Bewijs. We bewijzen eerst dat $I(V(J)) = \sqrt{J}$: als $f \in \sqrt{J}$, dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $f^n \in J \subset I(V(J))$ (deze laatste inclusie volgt uit Lemma 2.2.4(3)) en dus geldt er dat $f \in \sqrt{I(V(J))} = I(V(J)))$ door Eigenschap 2.2.9(2). Omgekeerd, als $g \in I(V(J))$ en $J = (f_1, \ldots, f_r)$, stel dan

$$J' = (f_1, \ldots, f_r, x_{n+1}g - 1) \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_{n+1}],$$

zodat $V(J') = \varnothing$. Uit de zwakke Nullstellensatz volgt dan dat $J' = K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. In het bijzonder bestaan er dus $a, a_1, \ldots, a_r \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ zodat

$$1 = a(x_{n+1}g - 1) + a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r. \tag{2.4.1}$$

We beschouwen deze identiteit in de ring[2] $K(x_{n+1})[x_1, \ldots, x_n]$. Als we $y := x_{n+1}^{-1}$ stellen, dan kunnen we beide leden van (2.4.1) met een hoge macht N

[2]Herinner dat $K(x)$ notatie is voor het breukenlichaam van $K[x]$.

van y vermenigvuldigen zodat we een vergelijking

$$y^N = q(x_1, \ldots, x_n, y)(g - y) + \sum_{i=1}^{r} p_i(x_1, \ldots, x_n, y) f_i \in K[x_1, \ldots, x_n, y]$$

bekomen. Als we in deze vergelijking y vervangen door g, dan bekomen we

$$g^N = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_1, \ldots, x_n, g) f_i \in J,$$

en dus $g \in \sqrt{J}$. De rest van de stelling volgt nu eenvoudig:

- $I(-)$ stuurt algebraïsche verzamelingen naar radicale idealen door Eigenschap 2.2.9(2).
- Voor een algebraïsche verzameling X geldt er dat $V(I(X)) = X$ door Lemma 2.2.4(4).
- Voor een radicaal ideaal J geldt er dat $I(V(J)) = \sqrt{J} = J$.
- De afbeeldingen $I(-)$ en $V(-)$ draaien inclusies om door Lemma 2.2.4(1) en (2).

$\square$

Deze stelling is absoluut centraal voor de hele algebraïsche meetkunde en geeft een oplossing aan Voorbeeld 2.2.6(1). Hilberts oorspronkelijke bewijs kan gevonden worden in [**Hil93**]. Het bewijs hierboven werd gevonden door Rabinowitsch [**Rab30**].

Echter, deze stelling geeft geen oplossing voor Voorbeeld 2.2.6(2). Inderdaad, $J = (x^2 + 1) \trianglelefteq \mathbb{R}[x]$ is een radicaal ideaal (zie oefeningen), maar $I(V(J)) = \mathbb{R}[x] \neq (x^2 + 1) = \sqrt{J}$. Om deze reden zullen we vanaf nu veronderstellen:

K is een algebraïsch gesloten lichaam.

Opmerking 2.4.5. Het is mogelijk om algebraïsche meetkunde te ontwikkelen over niet algebraïsch gesloten lichamen, en zelfs over nog algemenere ringen, maar dit valt buiten het bestek van deze cursus.

Gevolg 2.4.6. *De bijectie van Stelling 2.4.4 kan beperkt worden tot een bijectie*

$$\mathbb{A}^n \rightleftarrows \{\textit{maximale idealen in } K[x_1, \ldots, x_n]\} =: \operatorname{MaxSpec}(K[x_1, \ldots, x_n])$$

Bewijs. Als $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, dan is $I(a) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ een maximaal ideaal. Omgekeerd, als $\mathfrak{m} \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ maximaal is, dan volgt uit het bewijs van de zwakke Nullstellensatz dat $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ voor een punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, en dus is $V(\mathfrak{m}) = \{a\}$ een punt. $\square$

2.5. Veeltermfuncties en coordinaat algebra's

DEFINITIE 2.5.1. Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een algebraïsche verzameling. Dan is de verzameling van veeltermfuncties (of reguliere functies) op X Les 3

$$A(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1 \mid f = F|_X \text{ voor een } F \in K[x_1, \dots, x_n]\}$$

uitgerust met de puntsgewijze optelling, vermenigvuldiging en scalaire vermenigvuldiging een K-algebra die we de coordinaat algebra van X noemen.

De volgende eigenschap volgt onmiddellijk uit de definitie van $I(X)$.

EIGENSCHAP 2.5.2. *Voor een algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{A}^n$ is er een isomorfisme*

$$\phi : K[x_1, \dots, x_n]/I(X) \longrightarrow A(X) : \overline{F} \mapsto F|_X$$

van K-algebras.

We kunnen veeltermfuncties op X dus identificeren met elementen in de quotientring $K[x_1, \dots, x_n]/I(X)$, en zullen dit vanaf nu stilzwijgend doen.

Deze eigenschap kunnen we nu gebruiken om relatieve versies van de resultaten die we tot nu toe gezien hebben te geven. Stel $Y \subset \mathbb{A}^n$ een algebraïsche verzameling.

DEFINITIE 2.5.3. Voor $S \subset A(Y)$ definieren we

$$V(S) := V_Y(S) := \{y \in Y \mid \forall f \in S : f(y) = 0\} \subset Y$$

de nulpuntenverzameling van S.

Ga zelf na dat deze definitie steek houdt, en dat dit precies de affiene algebraïsche verzamelingen van $\mathbb{A}^n$ zijn die in Y zitten. Verzamelingen van deze vorm noemen we affiene algebraïsche deelverzamelingen van Y.

DEFINITIE 2.5.4. Voor een deel $X \subset Y$, definieren we

$$I(X) := I_Y(X) := \{f \in A(Y) \mid \forall x \in X : f(x) = 0\} \trianglelefteq A(Y)$$

het ideaal horende bij X in Y.

STELLING 2.5.5. *Stel $Y \subset \mathbb{A}^n$ een affiene algebraïsche verzameling.*

1. *Ieder ideaal in $A(Y)$ is eindig voortgebracht.*
2. *Voor een ideaal $J \trianglelefteq A(Y)$ geldt er dat $I_Y(V_Y(J)) = \sqrt{J}$, en er zijn inclusie-omkerende bijecties*

$$\{\textit{algebraïsche deelverzamelingen van } Y\} \rightleftarrows \{\textit{radicale idealen in } A(Y)\}$$

$$X \longmapsto I_Y(X)$$

$$V_Y(J) \longleftarrow J$$

3. *Als $X \subset Y$ een algebraïsche deelverzameling is, dan*

$$A(X) \cong A(Y)/I_Y(X).$$

Bewijs. Ga zelf na dat deze stelling uit de basisstelling van Hilbert en de sterke Nullstellensatz volgt door te gebruiken dat idealen in de quotientring $A(Y) = K[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ overeenkomen met idealen van $K[x_1, \dots, x_n]$ die $I(Y)$ bevatten. $\square$

Gevolg 2.5.6. *De bijectie van Stelling 2.5.5 kan beperkt worden tot een bijectie*

$$Y \rightleftarrows \{\textit{maximale idealen in } A(Y)\} =: \mathrm{MaxSpec}(A(Y))$$

We bestuderen nog enkele standaard eigenschappen van de operaties $V(-)$ en $I(-)$ die in de volgende sectie belangrijk zullen zijn.

Eigenschap 2.5.7. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een affiene algebraïsche verzameling.*

(1) *Voor een willekeurige indexverzameling J en een stel deelverzamelingen $\{S_j \mid j \in J\}$ van $A(X)$ geldt er dat*

$$\cap_{j \in J} V(S_j) = V(\cup_{j \in J} S_j).$$

(2) *Voor een eindig aantal deelverzamelingen $S_1, \dots, S_k \subset A(X)$ geldt er dat*

$$\cup_{j=1}^{k} V(S_j) = V(\{s_{i_1} \cdots s_{i_k} \mid s_{i_j} \in S_j\}).$$

Bewijs. Puntje (1) is duidelijk, dus we bewijzen enkel (2). Het is voldoende (2) te bewijzen voor $k = 2$. Stel dus $x \in V(S_1) \cup V(S_2)$. Dan is $f(x) = 0$ voor alle $f \in S_1$ of $g(x) = 0$ voor alle $g \in S_2$. Dus is $(fg)(x) = 0$ voor alle $f \in S_1$ en $g \in S_2$, met andere woorden $x \in V(\{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\})$. Omgekeerd, als $x \notin V(S_1) \cup V(S_2)$, dan $x \notin V(S_1)$ en $x \notin V(S_2)$, en dus bestaan er $f \in S_1$ en $g \in S_2$ zodat $f(x) \neq 0$ en $g(x) \neq 0$. Dan is ook $(fg)(x) \neq 0$ en dus $x \notin V(\{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\})$. $\square$

Deze eigenschap zegt dus dat willekeurige doorsnedes en eindige unies van algebraïsche delen opnieuw algebraïsch zijn. We herformuleren deze eigenschap nu nog in termen van idealen.

Eigenschap 2.5.8. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een affiene algebraïsche verzameling.*

(1) *Voor een willekeurige indexverzameling J en een verzameling idealen $\{I_j \mid j \in J\}$ van $A(X)$ geldt er dat*

$$\cap_{j \in J} V(I_j) = V\big(\sum_{j \in J} I_j\big).$$

(2) *Voor een eindig aantal idealen $I_1, \dots, I_k \subset A(X)$ geldt er dat*

$$\cup_{j=1}^{k} V(I_j) = V\big(\prod_{j=1}^{k} I_j\big) = V\big(\cap_{j=1}^{k} I_j\big).$$

Bewijs. De enige gelijkheid die niet duidelijk is, is

$$V\big(\prod_{j=1}^{k} I_j\big) = V\big(\cap_{j=1}^{k} I_j\big).$$

Het is weer voldoende het geval $k = 2$ te bekijken, en we tonen eerst aan dat

$$\sqrt{J_1 \cap J_2} = \sqrt{J_1 J_2}. \tag{2.5.1}$$

Als $f \in \sqrt{J_1 \cap J_2}$, dan $f^n \in J_1 \cap J_2$ voor een zekere n, en dus $f^{2n} = f^n f^n \in J_1 J_2$ zodat $f \in \sqrt{J_1 J_2}$. Omgekeerd, als $f \in \sqrt{J_1 J_2}$, dan $f^n \in J_1 J_2 \subset J_1 \cap J_2$ voor een zekere n, en dus $f \in \sqrt{J_1 \cap J_2}$. Door de gelijkheid (2.5.1) te combineren met Stelling 2.5.5, zien we dat $I(V(J_1 \cap J_2)) = I(V(J_1 J_1))$, en dus ook

$$V(J_1 \cap J_2) = V(J_1 J_2).$$

□

Hieruit volgt makkelijk de volgende eigenschap.

Eigenschap 2.5.9. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een affiene algebraïsche verzameling, met algebraïsche deelverzamelingen $Y_1, Y_2 \subset X$. Dan geldt:*

(1) $I(Y_1 \cap Y_2) = \sqrt{I(Y_1) + I(Y_2)}$,
(2) $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

Bewijs. Deel (2) is duidelijk, dus we bewijzen enkel (1). Dit volgt omdat

$$\begin{aligned} \sqrt{I(Y_1) + I(Y_2)} &= I(V(I(Y_1) + I(Y_2)) \\ &= I(V(I(Y_1)) \cap V(I(Y_2))) \\ &= I(Y_1 \cap Y_2) \end{aligned}$$

□

2.6. De Zariski topologie

De volgende definitie zullen jullie uitvoerig bespreken in de cursus topologie. Stel X een verzameling.

Definitie 2.6.1. Een verzameling $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X noemt men een topologie (op X) indien aan de volgende voorwaarden is voldaan:

(1) $X \in \mathcal{T}$ en $\varnothing \in \mathcal{T}$.
(2) $A \in \mathcal{T}$ en $B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{T}$.
(3) $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Met andere woorden: een topologie op een verzameling X is een stel deelverzamelingen van X dat gesloten is onder eindige unies, willekeurige doorsnedes, en dat zowel de lege verzameling als X bevat.

Het koppel $(X, \mathcal{T})$ (of soms gewoon X als de topologie duidelijk is) noemt men een topologische ruimte, en de elementen van $\mathcal{T}$ noemen we de gesloten delen. De complementen van elementen van $\mathcal{T}$ (binnen X) noemen we de open delen.

VOORBEELD 2.6.2. Ga na dat $X = \mathbb{R}^n$ met $\mathcal{T}$ de verzameling van alle gesloten delen van $\mathbb{R}^n$ ten opzichte van de Euclidische metriek een topologische ruimte vormt. We noemen dit de Euclidische topologie.

Dit voorbeeld kan veralgemeend worden om te laten zien dat iedere metrische ruimte (X, d) aanleiding geeft tot een natuurlijke topologie op X. Het is echter niet waar dat iedere topologische ruimte van een metrische ruimte afkomstig is.[3] Dit is in het bijzonder waar voor de topologische ruimtes die wij zullen beschouwen.

De sluiting $\overline{Y}$ van $Y \subset X$ is per definitie de doorsnede van alle gesloten delen die Y bevatten, en is dus het kleinste gesloten deel van X dat Y bevat. Een topologie $\mathcal{T}$ op X induceert een topologie $\mathcal{T}_Y$ op iedere deelverzameling $Y \subset X$ door $\mathcal{T}_Y := \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{T}\}$ te stellen. Deze topologie wordt de spoortopologie genoemd.

DEFINITIE 2.6.3. Een afbeelding $f : X \longrightarrow Y$ tussen topologische ruimten $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heet continu in een punt $x \in X$ als voor ieder open deel U dat $f(x)$ bevat, $f^{-1}(U)$ een open deel is dat x bevat. De functie heet continu als ze continu is in ieder punt van X.

EIGENSCHAP 2.6.4. *Stel $f : X \longrightarrow Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

(1) *f is continu,*
(2) *de inverse beelden van open delen in Y zijn open in X,*
(3) *de inverse beelden van gesloten delen in Y zijn gesloten in X.*

BEWIJS. (1) $\Rightarrow$ (2): stel U een willekeurig open deel van Y. Als U geen enkel punt $f(x)$ bevat, dan is $f^{-1}(U) = \varnothing$, en dus open. Als U een punt $f(x)$ bevat, dan is $f^{-1}(U)$ een open deel van X (dat x bevat). Dus de inverse beelden van open delen zijn open.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): dit volgt door overgang op complementen.

(2) $\Rightarrow$ (1): stel $x \in X$. Als U een open deel van Y is dat $f(x)$ bevat, dan is $f^{-1}(U)$ een open deel van X dat x bevat. Klaar! $\square$

OPMERKING 2.6.5. Een functie $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ tussen metrische ruimten is continu (in de zin van Analyse II) enkel en alleen indien ze continu is in de zin van Definitie 2.6.3, waarbij X en Y de natuurlijke topologieen afgeleid uit d en d' dragen.

DEFINITIE 2.6.6 (Zariski topologie). Stel X een algebraïsche verzameling en

$$\mathcal{T}_{Zar} = \{V(S) \mid S \subset A(X)\}.$$

Uit Eigenschap 2.5.8 volgt nu dat $\mathcal{T}_{Zar}$ een topologie is op X die we de Zariski topologie noemen. Per definitie zijn de gesloten delen van X dus de

[3] De topologische ruimten die men wel zo kan verkrijgen worden metriseerbaar genoemd, zie de cursus topologie.

algebraïsche deelverzamelingen van X, en de open delen de complementen van algebraïsche deelverzamelingen.

Opmerking 2.6.7. De naam van deze topologie verwijst naar Zariski's ICM toespraak [**Zar52**] uit 1950. Er zijn echter overtuigende argumenten die de ontdekking van deze topologie situeren in de jaren '30, en toeschrijven aan Wolfgang Krull, zie bijvoorbeeld [**LB16**]. Het staat in ieder geval buiten kijf dat Jacobson al in 1945 (een veel algemenere versie van) deze topologie heeft gedefinieerd [**Jac45**].

Opmerking 2.6.8. Voor een algebraïsch deel $X \subset \mathbb{A}^n$ kunnen we twee topologieen op X beschouwen:

(1) de Zariski topologie
(2) de spoortopologie komende van de inclusie in $\mathbb{A}^n$

Ga na dat deze twee topologieen overeenkomen, en dit dus niet tot verwarring kan leiden.

Vanaf nu veronderstellen we stilzwijgend dat algebraïsche verzamelingen met de Zariski topologie uitgerust zijn.

Voor een $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ gedraagt de Zariski topologie zich behoorlijk verschillend van de Euclidische topologie. Inderdaad, ieder Zariski gesloten deel is ook gesloten in de Euclidische topologie (zie oefeningen), maar het omgekeerde is niet waar.

Voorbeeld 2.6.9. De eenheidsbol $B = \{x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \mid |x| \leq 1\}$ is gesloten in de Euclidische topologie, maar niet in de Zariski topologie. Inderdaad, we hebben in Voorbeeld 2.1.7 gezien dat de Zariski-gesloten delen van $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ net de eindige delen en $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ zelf zijn. In het bijzonder geldt er dus dat $\overline{B} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

Intuitief kunnen we stellen dat Zariski gesloten delen heel klein zijn, en de Zariski open delen zijn dus groot. We zullen dit preciezer maken in de oefeningen.

Definitie 2.6.10. Stel X een topologische ruimte.

(1) X heet reducibel als $X = X_1 \cup X_2$ voor niet-lege gesloten delen $X_1, X_2 \subsetneq X$. Als dit niet het geval is noemen we X irreducibel.
(2) X heet onsamenhangend als $X = X_1 \cup X_2$ voor niet-lege gesloten delen $X_1, X_2 \subsetneq X$ zodat $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Als dit niet het geval is noemen we X samenhangend.

Voorbeeld 2.6.11. Beschouw $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. In de Euclidische topologie kunnen we X schrijven als

$$X = \{x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \mid |x| \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \mid |x| \geq 1\},$$

en dus is X reducibel. In de Zariski topologie is X echter wel irreducibel.

Opmerking 2.6.12. Met betrekking tot samenhangendheid gedragen de Euclidische en Zariski topologie zich wel analoog. Inderdaad, een algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ is samenhangend in de Euclidische topologie enkel en alleen indien ze samenhangend is in de Zariski topologie. Het (niet-triviale) bewijs van deze bewering kan gevonden worden in [**Sha77**, Ch.VII, §2].

We bepalen nu welke ringtheoretische eigenschappen van $A(X)$ overeenkomen met deze topologische eigenschappen.

Eigenschap 2.6.13. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een algebraïsche verzameling.*

(1) *X is samenhangend $\Leftrightarrow$ $A(X)$ heeft geen niet-triviale idempotenten.*[4]
(2) *X is irreducibel $\Leftrightarrow$ $A(X)$ is een domein.*

Bewijs. We beginnen met (1). Stel $e \in A(X)$ een niet-triviale idempotent. Dan geldt

$$V_X(e) \cup V_X(1-e) = V_X(e(1-e)) = V_X(0) = X.$$

Ook geldt er dat $V_X(e) \cap V_X(1-e) = \varnothing$, en $V_X(e), V_X(1-e) \subsetneq X$, dus is X onsamenhangend. Omgekeerd, stel $X = X_1 \cup X_2$ met $X_1, X_2 \subsetneq X$ twee disjuncte gesloten verzamelingen. Dan weten we van Stelling 2.5.5(3) dat $A(X_1) \cong A(X)/I_X(X_1)$ en $A(X_2) \cong A(X)/I_X(X_2)$. Merk nu op dat

$$A(X) = I_X(\varnothing) = I_X(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I_X(X_1) + I_X(X_2)},$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit Eigenschap 2.5.9. We zien dus dat $1 \in \sqrt{I_X(X_1) + I_X(X_2)}$, en dus ook $1 \in I_X(X_1) + I_X(X_2)$, hetgeen betekent dat $I_X(X_1)$ en $I_X(X_2)$ comaximaal zijn. Uit de Chinese reststelling volgt nu

$$A(X) = \frac{A(X)}{I_X(X)} = \frac{A(X)}{I_X(X_1) \cap I_X(X_2)} \cong A(X_1) \times A(X_2).$$

Het inverse beeld onder dit isomorfisme van de idempotent $(1,0) \in A(X_1) \times A(X_2)$ is een niet-triviale idempotent in $A(X)$.

Nu bewijzen we (2). Als $A(X)$ geen domein is, stel dan $f_1, f_2 \in A(X)$ niet-nul zodat $f_1 f_2 = 0$. Dan geldt

$$V_X(f_1) \cup V_X(f_2) = V_X(f_1 f_2) = X$$

en $V_X(f_1), V_X(f_2) \subsetneq X$, dus is X reducibel. Omgekeerd, als $X = X_1 \cup X_2$ voor niet-lege gesloten delen $X_1, X_2 \subsetneq X$, dan volgt uit Stelling 2.5.5(2) dat $I_X(X_i) \neq (0)$ voor $i = 1, 2$, en dus kunnen we niet-nulle $f_i \in I(X_i)$ kiezen. Het product $f_1 f_2$ verdwijnt dan op $X_1 \cup X_2 = X$, en dus $f_1 f_2 = 0 \in A(X)$ en $A(X)$ is geen domein. Klaar! □

Les 4

Definitie 2.6.14. Een irreducibele algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{A}^n$ noemen we een affiene varieteit. Een open deel van een affiene varieteit noemen we een quasi-affiene varieteit.

Definitie 2.6.15. Een irreducibele algebraïsche deelverzameling van een algebraïsche verzameling Y noemen we een affiene deelvarieteit van Y.

[4] Voor een ring R zeggen we dat $e \in R$ een niet-triviale idempotent is als $e^2 = e$ en $e \neq 0, 1$.

GEVOLG 2.6.16. *De bijectie van Stelling 2.5.5 kan beperkt worden tot een bijectie*

$$\{\textit{affiene deelvariëteiten van } Y\}$$
$$\uparrow\downarrow$$
$$\{\textit{priemidealen in } A(Y)\} =: \mathrm{Spec}(A(Y))$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.6.13(2) volgt dat $X \subset Y$ een affiene deelvarieteit is enkel en alleen indien $A(X) \cong A(Y)/I_Y(X)$ een domein is enkel en alleen indien $I_Y(X) \trianglelefteq A(Y)$ een priemideaal is. Klaar! □

VOORBEELD 2.6.17.
(1) Een eindige algebraïsche verzameling is irreducibel enkel en alleen indien ze samenhangend is enkel en alleen indien ze hoogstens 1 punt bevat.
(2) Iedere irreducibele ruimte is samenhangend.
(3) De affiene ruimte $\mathbb{A}^n$ is irreducibel.
(4) De algebraïsche verzameling $X = V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ is niet irreducibel, omdat $V(xy) = V(x) \cup V(y)$, maar wel samenhangend.

Een evidente vraag is nu wanneer we een unieke ontbinding in irreducibele delen kunnen verwachten.

DEFINITIE 2.6.18. Een topologische ruimte X heet noethers als er geen oneindige strikt dalende keten

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots$$

van gesloten delen van X bestaat.

EIGENSCHAP 2.6.19. *Stel Y een noetherse topologische ruimte en $X \subset Y$. Dan is X uitgerust met de spoortopologie een noetherse topologische ruimte.*

BEWIJS. Stel

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots \tag{2.6.1}$$

een strikt dalende keten gesloten delen van X. Per definitie van de spoortopologie is $X_i = X \cap Y_i$, met Y_i gesloten in Y. Dan is

$$Y_0 \supsetneq Y_0 \cap Y_1 \supsetneq \cdots$$

een strikt dalende keten gesloten delen in Y, en is dus stationair. Maar dan is ook de keten (2.6.1) stationair. Klaar! □

STELLING 2.6.20. *In een noetherse topologische ruimte Y kan ieder nietleeg gesloten deel $X \subset Y$ geschreven worden als een eindige unie*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$$

van irreducibele gesloten delen. Als voor alle $i \neq j$ geldt dat $X_i \not\subset X_j$, dan zijn $X_1, \ldots, X_r$ uniek op permutatie na.

BEWIJS. We tonen eerst het bestaan aan van een dergelijke decompositie. Stel $\mathcal{S}$ de verzameling van niet-lege gesloten delen van Y die niet geschreven kunnen worden als een eindige unie van irreducibele gesloten delen. Als $\mathcal{S}$ niet-leeg is, dan bevat $\mathcal{S}$ een minimaal element X omdat Y noethers is. Omdat $X \in \mathcal{S}$, is X reducibel en dus $X = X' \cup X''$ voor niet-lege gesloten delen $X', X'' \subsetneq X$. Omdat X minimaal is, geldt er dat $X', X'' \notin \mathcal{S}$ en dus kunnen zowel X' en X'' geschreven worden als eindige unie van irreducibele gesloten delen. Maar dan geldt dit ook voor X, contradictie! We besluiten dan $\mathcal{S} = \varnothing$ en dus kan ieder niet-leeg gesloten deel geschreven worden als een eindige unie van irreducibele gesloten delen.

Stel nu dat X op twee manieren ontbonden kan worden

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_r = X'_1 \cup \cdots \cup X'_s$$

met X_i, X'_i irreducibele gesloten delen en voor alle i, j: $X_i \not\subset X_j$ en $X'_i \not\subset X'_j$. Dan geldt

$$X'_i = X'_i \cap X = (X'_i \cap X_1) \cup \cdots \cup (X'_i \cap X_r),$$

maar omdat X'_i irreducibel is, bestaat er een j zodat $X'_i = X'_i \cap X_j$ en dus $X'_i \subset X_j$. Compleet analoog bestaat er een k zodat $X_j \subset X'_k$, en dus $X'_i \subset X_j \subset X'_k$, maar dit kan enkel indien $i = k$. We concluderen dat er voor iedere index i een index j bestaat zodat $X_i = X'_j$. De X_i en X'_j zijn dus aan elkaar gelijk op permutatie na. Klaar! □

We noemen $X_1, \ldots, X_r$ uit de stelling de irreducibele componenten van X.

GEVOLG 2.6.21. *Iedere deelverzameling $X \subset Y$ van een algebraïsche verzameling $Y \subset \mathbb{A}^n$ is een noetherse topologische ruimte, en kan op een unieke manier geschreven worden als eindige unie*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_r,$$

van affiene deelvariëteiten $X_i \subset Y$, zodat voor elke $i \neq j$, $X_i \not\subset X_j$.

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit Eigenschap 2.6.19 en Stelling 2.6.20 zodra we bewijzen dat $\mathbb{A}^n$ met de Zariski topologie een noetherse topologische ruimte is. Stel daarom

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots \tag{2.6.2}$$

een strikt dalende keten van gesloten delen van $\mathbb{A}^n$. Dan is

$$I(X_0) \subset I(X_1) \subset \cdots$$

een stijgende keten van idealen in $A = K[x_1, \ldots, x_n]$. Omdat A een noetherse ring is, is deze keten stationair. Omdat voor elke i geldt dat $X_i = V(I(X_i))$, is ook de keten (2.6.2) stationair. □

We eindigen dit hoofdstuk door de notie van Krull dimensie voor topologische ruimten in te voeren. De intuitie is eenvoudig: in een irreducibele topologische ruimte X zou ieder gesloten deel van X dat niet gelijk is aan

X strikt kleinere dimensie moeten hebben. We kunnen dit als volgt formaliseren.

Definitie 2.6.22. Stel X een niet-lege topologische ruimte.

(1) De Krull dimensie $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ van X is het supremum over alle $n \in \mathbb{N}$ zodat er een keten
$$\varnothing \neq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subset X$$
van lengte n bestaande uit irreducibele gesloten delen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ van X bestaat.

(2) Stel $Y \subset X$ een niet-leeg irreducibel gesloten deel van X. Dan is de codimensie $\operatorname{codim}_X(Y) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ van Y in X het supremum over alle $n \in \mathbb{N}$ zodat er een keten
$$Y = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subset X$$
bestaande uit irreducibele gesloten delen $Y_1, \ldots, Y_n$ van X die Y bevatten bestaat.

Voorbeeld 2.6.23. De Krull dimensie van $\mathbb{R}^n$ uitgerust met de Euclidische topologie is 0. Dit kan veralgemeend worden naar iedere Hausdorff topologische ruimte (zie cursus topologie).

Krull dimensie is dus niet voor iedere topologische ruimte interessant, maar gelukkig wel voor diegenen die we bekijken. Voor een algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{A}^n$ definieren we $\dim(X)$ als de dimensie van X uitgerust met de Zariski topologie.

Voorbeeld 2.6.24. (1) Als X een niet-lege eindige algebraïsche verzameling is, dan $\dim(X) = 0$.

(2) $\dim(\mathbb{A}^1) = 1$: inderdaad, we weten reeds dat $\mathbb{A}^1$ irreducibel is en dat de algebraïsche delen van $\mathbb{A}^1$ net de eindige delen en $\mathbb{A}^1$ zelf zijn, en dus is $\{x\} \subsetneq \mathbb{A}^1$ de langste keten die we kunnen maken.

(3) $\dim(\mathbb{A}^n) \geq n$: er bestaat immers een keten
$$V(x_1, \ldots, x_n) \subsetneq V(x_2, \ldots, x_n) \subsetneq \cdots \subsetneq V(x_n) \subsetneq V(0) = \mathbb{A}^n$$
en ieder van deze delen is irreducibel.

Men zou verwachten dat het niet moeilijk is om aan te tonen dat $\dim(\mathbb{A}^n) = n$. Dit is echter niet zo evident als het lijkt, en we zullen nu enkele van de subtiliteiten bespreken.

2.7. Krull dimensie

Definitie 2.6.22 kunnen we onmiddellijk vertalen naar commutatieve algebra, waar de dimensietheorie van noetherse ringen voor handen is.

Definitie 2.7.1. Stel R een commutatieve ring.

(1) De Krull dimensie $\dim(R) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ van R is het supremum over alle $n \in \mathbb{N}$ zodat er een keten
$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$
van onderling verschillende priemidealen bestaat.

(2) De hoogte $\mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ van een priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ is het supremum over alle $n \in \mathbb{N}$ zodat er een keten
$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}$$
van onderling verschillende priemidealen bestaat.

EIGENSCHAP 2.7.2. *Voor een affiene algebraïsche verzameling X en een irreducibel algebraïsch deel $Y \subset X$ geldt er dat*
$$\dim(X) = \dim(A(X)) \text{ en } \operatorname{codim}_X(Y) = \mathsf{ht}_{A(X)}(I(Y)).$$

BEWIJS. Dit volgt omdat voor een algebraïsche verzameling X de irreducibele gesloten delen overeenkomen met de priemidealen van $A(X)$. Merk op dat $I(Y) \trianglelefteq A(X)$ een priemideaal is omdat Y irreducibel is. □

Hoewel deze noties erg intuitief zijn, is het zeer moeilijk om de dimensie van een algebraïsche verzameling of van een commutatieve ring expliciet te berekenen. Een van de redenen is dat maximale ketens van priemidealen verschillende lengtes kunnen hebben. Dit is te wijten aan het feit dat de irreducibele componenten van een algebraïsche verzameling verschillende dimensies kunnen hebben.

VOORBEELD 2.7.3. Stel $X = V(xz, yz) \subset \mathbb{A}^3$ de unie van een rechte en een vlak. Dan kan men aantonen dat zowel
$$V(x, y, z) \subsetneq V(x, y) \subset X$$
als
$$V(x, y, z) \subsetneq V(x, z) \subsetneq V(z) \subset X$$
ketens van maximale lengte zijn. Het blijkt verder dat $\dim(X) = 2$.

We tonen nu aan hoe de situatie in Voorbeeld 2.7.3 te ontwijken.

LEMMA 2.7.4. *Stel R een ring en $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ een priemideaal. Dan geldt*
$$\dim(R) \geq \dim(R/\mathfrak{p}) + \mathsf{ht}_R(\mathfrak{p})$$

BEWIJS. Stel $\dim(R/\mathfrak{p}) = r$ en $\mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) = m$. Dan bestaan er dus ketens
$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m \subset \mathfrak{p} \text{ en } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_r$$
van priemidealen in R die we aan elkaar kunnen ketenen om een enkele keten van lengte $m + r$ te bekomen. Klaar! □

EIGENSCHAP 2.7.5. *Stel R een ring van eindige dimensie zodat iedere maximale keten van priemidealen dezelfde lengte heeft. Als $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ een priemideaal is, dan geldt:*

(1) $\dim(R/\mathfrak{p}) < \infty$ *en iedere maximale keten van priemidealen in* $R/\mathfrak{p}$ *heeft dezelfde lengte,*
(2) $\dim(R) = \dim(R/\mathfrak{p}) + \mathsf{ht}_R(\mathfrak{p})$.

BEWIJS. Neem een maximale keten van priemidealen in $R/\mathfrak{p}$. Deze komt overeen met een keten van priemidealen

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_r \tag{2.7.1}$$

in R. Merk op dat de eerste gelijkheid volgt uit de maximaliteit van de keten in $R/\mathfrak{p}$ omdat $(0) \trianglelefteq R/\mathfrak{p}$ een priemideaal is. We kunnen (2.7.1) uitbreiden tot een maximale keten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_r$$

van priemidealen in R. Er geldt dus dat $\mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) \geq m$ en $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq r$. Aangezien iedere maximale keten van priemidealen in R dezelfde lengte heeft, geldt er dat $m + r = \dim(R) < \infty$ en uit Lemma 2.7.4 volgt

$$\dim(R) \geq \dim(R/\mathfrak{p}) + \mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) \geq r + m = \dim(R).$$

Hieruit volgen beide beweringen. Klaar! □

Om verder te gaan vermelden we enkele belangrijke resultaten uit dimensietheorie zonder bewijs.

STELLING 2.7.6. [**Mat80**, (13.C)] *Voor een eindige uitbreiding* $R \subset S$ *geldt er dat* $\dim(R) = \dim(S)$.

STELLING 2.7.7. [**Mat80**, (14.A)] *Iedere maximale keten van priemidealen in* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *heeft lengte* n. *In het bijzonder geldt* $\dim(K[x_1, \ldots, x_n]) = n$.

OPMERKING 2.7.8. Rigoureuze bewijzen van deze stellingen vereisen een grondige studie van integrale uitbreidingen. Meer bepaald zijn er vier resultaten nodig over het gedrag van priemidealen onder integrale uitbreidingen die bekend staan als *lying over*, *incomparability*, *going up* en *going down*, en die we in deze cursus niet behandelen.

Stel R nu een eindig voortgebrachte K-algebra. Herinner dat het Noether normalisatielemma zegt dat R eindig is over een veeltermring $K[x_1, \ldots, x_d]$. Uit de voorgaande twee stellingen trekken we onmiddellijk een belangrijk gevolg.

GEVOLG 2.7.9. *Voor een eindig voortgebrachte* K*-algebra* R *geldt er dat* $d = \dim(R) < \infty$. *In het bijzonder is* $d \in \mathbb{N}$ *dus uniek bepaald. Als* R *bovendien een domein is, dan heeft iedere maximale keten van priemidealen in* R *dezelfde lengte.*

BEWIJS. Het eerste deel van de stelling volgt door het Noether normalisatielemma te combineren met Stelling 2.7.6 en het tweede deel van Stelling 2.7.7. Als R bovendien een domein is, dan is $R \cong K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}$, met $\mathfrak{p} \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ een priemideaal. Dus volgt het te bewijzen door Eigenschap 2.7.5 te combineren met Stelling 2.7.7. Klaar! □

OPMERKING 2.7.10. Dit is een erg subtiel feit over eindig voortgebrachte K-algebra's. Inderdaad, je zou kunnen vermoeden dat de dimensie van een ring eindig is enkel en alleen indien de ring noethers is, maar dit is niet waar. Zo is

$$R = K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]/(x_i x_j \mid 1 \leq i \leq j < \infty)$$

bijvoorbeeld een niet-noetherse ring van dimensie 0. Er bestaan ook voorbeelden van noetherse ringen met oneindige dimensie, maar die zijn moeilijker te construeren, zie bijvoorbeeld [**Eis95**, Exercise 9.6].

Les 5

GEVOLG 2.7.11. *Stel X een affiene deelvarieteit van een affiene varieteit Y. Dan geldt*

$$\dim(Y) = \dim(X) + \operatorname{codim}_Y(X),$$

en al deze kwantiteiten zijn eindig.

BEWIJS. Aangezien Y een affiene variëteit is, geldt er dat $R = A(Y)$ een domein is, en dus zegt Gevolg 2.7.9 dat iedere maximale keten van priemidealen in R dezelfde lengte heeft, en dat $\dim(R) < \infty$. Aangezien $X \subset Y$ een affiene deelvariëteit is, geldt er dat $I_Y(X) \trianglelefteq R$ een priemideaal is. Uit Eigenschap 2.7.5 volgt dat

$$\dim(R) = \dim(R/I_Y(X)) + \mathsf{ht}_R(I_Y(X)).$$

Uit Theorem 2.5.5 en Eigenschap 2.7.2 volgt dan deze gelijkheid herschreven kan worden als

$$\dim(Y) = \dim(X) + \operatorname{codim}_Y(X).$$

□

Herinner uit de oefeningen dat een priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ minimaal is over een ideaal $I \trianglelefteq R$ als $I \subset \mathfrak{p}$, en er bestaat geen priemideaal $\mathfrak{q} \trianglelefteq R$ zodat $I \subset \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$.

STELLING 2.7.12 (Krulls Hauptidealsatz). [**Mat80**, (12.I)] *Stel R een noetherse ring, en $I = (f_1, \ldots, f_r) \trianglelefteq R$ een echt ideaal. Als $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ een priemideaal minimaal over I is, dan geldt*

$$\mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq r.$$

Als $r = 1$, en f_1 is geen nuldeler, dan geldt voor ieder minimaal priemideaal over I dat $\mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) = 1$.

Deze belangrijke stelling kunnen we ook weer meetkundig interpreteren. Laat ons allereerst bekijken waarmee de minimale priemidealen overeenkomen.

EIGENSCHAP 2.7.13. *Stel $Y = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ een affiene algebraïsche verzameling. Dan is $X = V(\mathfrak{p})$ een irreducibele component van Y als en slechts als $\mathfrak{p} \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ een minimaal priemideaal boven I is.*

BEWIJS. Stel dat

$$Y = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i$$

de decompositie van Y in irreducibele componenten $Y_i = V(\mathfrak{q}_\mathfrak{i})$ is, met $Y_i \subsetneq Y_j$ als $i \neq j$. Als $\mathfrak{p} \trianglelefteq K[x_1, \dots, x_n]$ een minimaal priemideaal boven I is, en we stellen $X = V(\mathfrak{p})$, dan geldt:

$$\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i \subset \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i = \bigcap_{i=1}^{r} I(Y_i) = I\left(\bigcup_{i=1}^{r} Y_i\right) = I(Y) \subset I(X) = \mathfrak{p},$$

en dus bestaat er een i zodat $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}$, aangezien $\mathfrak{p}$ priem is. Maar Y_i is irreducibel, en dus is $I(Y_i) = \mathfrak{q}_i$ priem, en volgt er dat $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}$, omdat $\mathfrak{p}$ minimaal is. Dus geldt $X = Y_i$. Omgekeerd, stel dat een priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq K[x_1, \dots, x_n]$ niet minimaal boven I is. Dan weten we dat er een minimaal priemideaal $I \subset \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$ bestaat, dus $X' = V(\mathfrak{p}') \subsetneq V(\mathfrak{p}) = X \subset Y$, en we hebben net aangetoond dat hieruit volgt dat X' een irreducibele component is van Y, stel $X' = Y_i$. Als $X = Y_j$ voor een j, dan zou $Y_i \subsetneq Y_j$, hetgeen een contradictie is, dus is X geen irreducibele component van Y. □

GEVOLG 2.7.14. *Stel Z een algebraïsche verzameling, en $\{f_1, \dots, f_r\} \subset A(Z)$ zodat $(f_1, \dots, f_r) \neq A(Z)$. Dan geldt voor iedere irreducibele component X van $Y = V_Z(f_1, \dots, f_r)$ dat*

$$\operatorname{codim}_Z(X) \leq r.$$

Als $r = 1$ en f_1 is geen nuldeler, dan $\operatorname{codim}_Z(X) = 1$.

BEWIJS. Stel $R = A(Z)$, en $I = (f_1, \dots, f_r)$. We hebben net gezien dat de minimale priemidealen $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ boven I overeenkomen met de irreducibele componenten $X = V(\mathfrak{p})$ van $Y = V_Z(f_1, \dots, f_r)$, dus het te bewijzen volgt onmiddellijk uit Eigenschap 2.7.2 en Stelling 2.7.12. □

Het speciale geval $r = 1$ is heel nuttig, en we zullen vaak de volgende variant gebruiken.

GEVOLG 2.7.15. *Voor een affiene algebraïsche verzameling $Z \subset \mathbb{A}^n$, en een niet-constante veelterm $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ zodat $f|_{Z_i} \neq 0$ voor iedere irreducibele component Z_i van Z, geldt er dat*

$$\dim(Z \cap V(f)) = \dim(Z) - 1.$$

BEWIJS. We veronderstellen eerst dat Z irreducibel is. Uit het gegeven volgt dat $f \neq 0$ in het domein $A(Z)$, en dus is f geen nuldeler in $A(Z)$. Aangezien $Z \cap V(f) = V_Z(f)$, leiden we uit Gevolg 2.7.15 af dat voor iedere irreducibele component X van $V_Z(f)$ geldt dat $\operatorname{codim}_Z(X) = 1$. Uit Gevolg 2.7.11 leiden we dan af dat

$$\dim(X) = \dim(Z) - 1.$$

Aangezien $\dim(V_Z(f))$ gelijk is aan het supremum van de dimensies van de irreducibele componenten van $V_Z(f)$, volgt nog dat

$$\dim(Z \cap V(f)) = \dim(Z) - 1.$$

Als Z niet irreducibel is, dan geldt

$$\begin{aligned}
\dim(Z \cap V(f)) &= \dim(\cup_{i=1}^{r} Z_i \cap V(f)) \\
&= \max\{\dim(Z_i \cap V(f)) \mid i = 1, \ldots, r\} \\
&= \max\{\dim(Z_i) - 1 \mid i = 1, \ldots, r\} \\
&= \max\{\dim(Z_i) \mid i = 1, \ldots, r\} - 1 \\
&= \dim(Z) - 1.
\end{aligned}$$

□

Opmerking 2.7.16. De naam Hauptidealsatz komt van het speciale geval $r = 1$, dat bewezen werd door Wolfgang Krull [**Kru28**].

Deze eigenschappen geven dus een partieel antwoord op Vraag 3 uit de inleiding, door het verband tussen de dimensie van een algebraïsche verzameling $V(I) \subset \mathbb{A}^n$ en het aantal voortbrengers van I te beschrijven.

HOOFDSTUK 3

Reguliere functies en morfismen

In dit hoofdstuk introduceren we de correcte notie van morfisme tussen variëteiten, zodat we in het bijzonder kunnen zeggen wanneer twee variëteiten isomorf zijn.

3.1. Reguliere functies

We hebben reeds gezien dat voor een affiene varieteit $X \subset \mathbb{A}^n$, een veeltermfunctie (of reguliere functie) $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ per definitie de beperking is van een veeltermfunctie op $\mathbb{A}^n$. Deze definitie heeft twee schijnbare gebreken:

(1) In andere domeinen van de wiskunde zijn de relevante functies vaak **lokaal** van aard: het volstaat een eigenschap in ieder punt van het domein na te gaan. De beperking zijn van een veeltermfunctie is duidelijk niet lokaal.

(2) We hebben al meer algemene variëteiten ingevoerd, namelijk quasi-affiene variëteiten (later passeren ook nog (quasi-)projectieve variëteiten de revue), maar we hebben niet gedefinieerd wat een reguliere functie op zo'n varieteit is. In het bijzonder willen we een definitie die **onafhankelijk is van een specifieke inbedding** in een affiene (of projectieve) ruimte.

Een voorbeeld van (1) is analyse: hier hebben jullie gezien dat een functie continu, respectievelijk differentieerbaar, is enkel en alleen indien ze continu, respectievelijk differentieerbaar is in ieder punt. We moeten dus zeggen wat het betekent om regulier te zijn in een punt.

Een voorbeeld van (2) is $X = \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$: dit is een quasi-affiene varieteit. Indien we enkel zouden werken met beperkingen van veeltermen op $\mathbb{A}^1$, dan bekomen we $K[x]$ als ring van veeltermfuncties. Er is echter een natuurlijke projectie

$$V(xy-1) \longrightarrow X : (x,y) \mapsto x,$$

en het is makkelijk in te zien dat dit een bijectie is. Intuitief verwachten we dat dit een isomorfisme van variëteiten zal zijn, en dus zouden ook de algebra's van reguliere functies moeten samenvallen. Echter

$$A(X) \cong K[x,y]/(xy-1) \ncong K[x],$$

hetgeen aantoont dat we op een quasi-affiene varieteit meer algemene functies zouden moeten toelaten om een consistente theorie te bekomen. De oplossing is om ook quotienten van veeltermfuncties toe te laten: zo is x^{-1} bijvoorbeeld wel gedefinieerd op X, maar niet op $\mathbb{A}^1$, en inderdaad:

$$K[x, x^{-1}] \cong A(X).$$

DEFINITIE 3.1.1. Stel $U \subset \mathbb{A}^n$ een quasi-affiene varieteit, en $p \in U$. Een functie $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ heet regulier in p indien er een open deel $U_p \subset U$ bestaat dat p bevat en veeltermen $f_p, g_p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zodat

$$\forall x \in U_p : g_p(x) \neq 0 \text{ en } \varphi(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)}.$$

Als $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ regulier is in ieder punt $p \in U$, dan zeggen we dat φ een reguliere functie is.

We noteren $\mathscr{O}(U)$ de collectie van alle reguliere functies op U. Uitgerust met de puntsgewijze optelling, vermenigvuldiging en scalaire vermenigvuldiging vormt $\mathscr{O}(U)$ een K-algebra.

Deze definitie lijkt op eerste zicht misschien erg omslachtig. Je zou kunnen vermoeden dat een reguliere functie altijd te schrijven is als een globaal gedefinieerd quotient van veeltermen, maar het volgende voorbeeld toont aan dat dit ijdele hoop is.

VOORBEELD 3.1.2. Stel $X = V(xw - yz) \subset \mathbb{A}^4$ met open deel

$$U = X \backslash V(y, w) = \{(x, y, z, w) \in X \mid y \neq 0 \text{ of } w \neq 0\} \subset X.$$

Beschouw nu de reguliere functie

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^1 : (x, y, z, w) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{als } y \neq 0 \\ \frac{z}{w} & \text{als } w \neq 0 \end{cases}$$

Deze functie is goed gedefinieerd omdat $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ voor een punt $(x, y, z, w) \in U$ met $y \neq 0$ en $w \neq 0$. Men kan aantonen dat er geen veeltermfuncties $f, g \in K[x, y, z, w]$ bestaan zodat $\varphi = \frac{f}{g}$ op heel U.

De volgende eigenschap geeft een eerste aanduiding dat dit een goede definitie is. Voor een topologische ruimte X zeggen we dat een collectie open delen $\{U_i \mid i \in I\}$ van X een open overdekking van X vormt als $X = \cup_{i \in I} U_i$.

LEMMA 3.1.3. *Stel X een topologische ruimte, en $\{U_i \mid i \in I\}$ een open overdekking van X. Dan is een deel $Z \subset X$ gesloten in X enkel en alleen indien $Z \cap U_i$ gesloten is in U_i voor iedere $i \in I$.*

BEWIJS. Stel $Z \subset X$ gesloten. Door de definitie van de spoortopologie op U_i is $Z \cap U_i$ dan gesloten in U_i voor iedere $i \in I$. Omgekeerd, als iedere $Z \cap U_i$ gesloten is in U_i, dan is $U_i \backslash (Z \cap U_i) = (X \backslash Z) \cap U_i$ open in U_i, en dus ook open in X. Maar dan is ook $\cup_{i \in I} (X \backslash Z) \cap U_i = X \backslash Z$ open in X, en dus is Z gesloten in X. Klaar! $\square$

EIGENSCHAP 3.1.4. *Stel $U \subset \mathbb{A}^n$ een quasi-affiene varieteit.*

(1) *Een reguliere functie* $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ *is continu ten opzichte van de Zariski topologie op* U *en* $\mathbb{A}^1$.
(2) *Als* $f, g \in \mathscr{O}(U)$ *en* $f|_V = g|_V$ *voor een open deel* $V \subset U$, *dan geldt* $f = g$.

Bewijs. We beginnen met (1). Omdat de gesloten delen van $\mathbb{A}^1$ bestaan uit de eindige delen en $\mathbb{A}^1$ zelf, en het inverse beeld van een unie de unie van de inverse beelden is, is het voldoende aan te tonen dat voor ieder punt $a \in \mathbb{A}^1$, het inverse beeld $\varphi^{-1}(a)$ gesloten is in U. Door Lemma 3.1.3 volstaat het aan te tonen dat $\varphi^{-1}(a) \cap U_p$ gesloten is in U_p voor iedere $p \in U$. Maar

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(a) \cap U_p &= \{x \in U_p \mid f_p(x)/g_p(x) = a\} \\ &= \{x \in U_p \mid (f_p - ag_p)(x) = 0\} \\ &= V(f_p - ag_p) \cap U_p\end{aligned}$$

is gesloten in U_p.

Nu bewijzen we (2): $f - g \in \mathscr{O}(U)$, en dus volgt er uit (1) dat $V(f-g)$ gesloten is in U, en we hebben ook dat $V \subset V(f-g)$, dus ook

$$\overline{V} \subset V(f-g).$$

Maar ieder open deel is dicht (zie oefeningen over Zariski topologie), en dus $\overline{V} = U$. Klaar! □

Opmerking 3.1.5. We weten dat Zariki open delen dicht zijn, en dus is Eigenschap 3.1.4(2) niet zo verrassend. Interessanter is dat die eigenschap ook geldt voor holomorfe functies (zie cursus Complexe Analyse): twee holomorfe functies op een (samenhangend) open deel $U \subset \mathbb{C}^n$ zijn gelijk als ze samenvallen op een kleiner open deel $V \subset U$ (in de Euclidische topologie). Dit is erg verrassend omdat open delen in de Euclidische topologie erg klein kunnen zijn, en zeker niet noodzakelijk dicht zijn.

3.2. Functielichamen en lokale ringen

We introduceren nu enkele ringen van functies geassocieerd met een quasi-affiene varieteit. Stel $U \subset \mathbb{A}^n$ een quasi-affiene varieteit, en beschouw koppels (V, φ) met $V \subset U$ een niet-leeg open deel en $\varphi \in \mathscr{O}(V)$. We noemen twee zo'n koppels (V_1, φ_1) en (V_2, φ_2) equivalent als

$$\varphi_1|_{V_1 \cap V_2} = \varphi_2|_{V_1 \cap V_2},$$

en noteren $(V_1, \varphi_1) \sim (V_2, \varphi_2)$. Merk op dat $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ (zie oefeningen over Zariski topologie). Deze relatie $\sim$ definieert een equivalentierelatie (ga na!) op de verzameling koppels (V, φ), en we noteren $[V, \varphi]$ voor de equivalentieklasse van het koppel (V, φ). Stel nu

$$K(U) := \{[V, \varphi] \mid \varnothing \neq V \subset U \text{ open en } \varphi \in \mathscr{O}(V)\}$$

de verzameling van de equivalentieklassen.

EIGENSCHAP 3.2.1. *De verzameling $K(U)$, uitgerust met de bewerkingen*

$$[V,\varphi]+[W,\chi]:=[V\cap W,\varphi+\chi] \text{ en } [V,\varphi]\cdot[W,\chi]:=[V\cap W,\varphi\cdot\chi]$$

vormt een lichaam, dat we het functielichaam van U noemen. De elementen van $K(U)$ worden rationale functies op U genoemd.

BEWIJS. Ga zelf na dat deze bewerkingen van $K(U)$ een ring maken, met eenheidselementen $[U,0]$ (voor de optelling) en $[U,1]$ (voor de vermenigvuldiging). We tonen nog dat ieder niet-nul element een multiplicatief inverse heeft. Als $[V,\varphi]\neq[U,0]$, dan is $(V,\varphi)\not\sim(U,0)$ en dus $\varphi|_V\neq 0$. Hieruit volgt dat $\varphi^{-1}(0)\subsetneq V$ een strikt gesloten deel is van V. Dus is $V':=V\backslash\varphi^{-1}(0)$ een niet-leeg open deel van U. Er volgt dat $1/\varphi$ een reguliere functie is op V' en

$$[V,\varphi]\cdot[V',1/\varphi]=[V',1]=[U,1],$$

en dus is $K(Y)$ inderdaad een lichaam. □

DEFINITIE 3.2.2. Stel $U\subset\mathbb{A}^n$ een quasi-affiene varieteit, en $p\in U$. Dan noemen we de deelring

$$\mathscr{O}_{U,p}=\{[V,\varphi]\mid p\in V\subset U \text{ open },\varphi\in\mathscr{O}(V)\}\subset K(U)$$

de lokale ring van U in p.

Men noemt $\mathscr{O}_{U,p}$ ook wel de staak van $\mathscr{O}(U)$ in p, en de elementen van $\mathscr{O}_{U,p}$ de kiemen van reguliere functies in p.

OPMERKING 3.2.3. De meetkundige interpretatie van de kiemen is dat ze functies zijn die gedefinieerd zijn in een willekeurig kleine omgeving van p. Zo kan men bijvoorbeeld ook kiemen van differentieerbare functies definieren: de kiem van een differentieerbare functie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ in een punt $p\in\mathbb{R}$ bepaalt bvb. de afgeleide van f in p, maar draagt niet voldoende informatie om de waarde $f(p)$ van f in p te bepalen. Een theoretisch kader hiervoor is de schoventheorie, die gebruikt wordt in de moderne algebraïsche meetkunde. Zie [**SSS70**] voor een leesbare introductie.

Les 6

Voor ieder punt $p\in U$ hebben we dus injectieve ringmorfismen

$$\mathscr{O}(U)\longrightarrow\mathscr{O}_{U,p}\longrightarrow K(U):\varphi\mapsto[U,\varphi]\mapsto[U,\varphi],$$

die ons toelaten $\mathscr{O}(U)$ en $\mathscr{O}_{U,p}$ als deelringen van $K(U)$ te beschouwen.

Herinner dat een lokale ring een commutatieve ring is met een uniek maximaal ideaal. Deze benaming komt van de volgende eigenschap.

EIGENSCHAP 3.2.4. *Voor een quasi-affiene varieteit U en een punt $p\in U$, is $\mathscr{O}_{U,p}$ een lokale ring, met uniek maximaal ideaal $\mathfrak{m}_p:=\{[V,\varphi]\mid\varphi(p)=0\}$.*

BEWIJS. De afbeelding

$$\mathscr{O}_{U,p}\longrightarrow K:[V,\varphi]\mapsto\varphi(p)$$

is goed gedefinieerd, en bepaalt een surjectief ringmorfisme met kernel $\mathfrak{m}_p$. Dus is $\mathfrak{m}_p$ een maximaal ideaal. Als $[V,\varphi] \in \mathscr{O}_{U,p}$ en $\varphi(p) \neq 0$, dan is $W := V \backslash \varphi^{-1}(0)$ een open omgeving van p, en is $[W, 1/\varphi] \in \mathscr{O}_{U,p}$ een inverse voor $[V,\varphi]$, dus is $[V,\varphi]$ inverteerbaar. Met andere woorden, $\mathfrak{m}_p$ bestaat net uit de niet-inverteerbare elementen van $\mathscr{O}_{U,p}$ en dus is $\mathscr{O}_{U,p}$ lokaal (zie Ring- en Moduultheorie). □

We berekenen nu al deze ringen in het geval U een affiene varieteit is. Herinner dat voor een priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ in een commutatieve ring, we

$$R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R$$

noteren voor de localisatie van R aan het multiplicatief gesloten deel $S := R \backslash \mathfrak{p}$. Voor een domein R noteren we $Q(R)$ voor het breukenlichaam van R. We hebben nog een lemma nodig.

Lemma 3.2.5. *Stel R een domein. Dan geldt*

$$R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \trianglelefteq R \\ \textit{maximaal}}} R_{\mathfrak{m}} \subset Q(R).$$

Bewijs. De inclusie $\subset$ is duidelijk, dus we bewijzen enkel $\supset$. Stel $s \in Q(R) \backslash R$, en beschouw het ideaal $I := \{r \in R \mid rs \in R\} \trianglelefteq R$. Dit is een echt ideaal omdat $1 \notin I$, en dus bestaat er een maximaal ideaal $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ dat I bevat. Dan $s \notin R_{\mathfrak{m}}$, omdat er anders een $t \notin \mathfrak{m}$ zou bestaan zodat $st \in R$, en dus $t \in I \subset \mathfrak{m}$. Klaar! □

Eigenschap 3.2.6. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een affiene varieteit. Dan geldt:*

(1) *de natuurlijke afbeelding $i : A(X) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ is een isomorfisme,*
(2) *voor een punt $p \in X$ met bijhorend maximaal ideaal $I_X(p) \trianglelefteq A(X)$ geldt er dat de natuurlijke afbeelding $i_p : A(X)_{I_X(p)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,p}$ een isomorfisme is,*
(3) *het homomorfisme $Q(A(X)) \longrightarrow K(X)$ geinduceerd door i is een isomorfisme.*

Bewijs. We bewijzen eerst (2). Restrictie definieert een ringmorfisme $K[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ met kern gelijk aan $I(X)$, dus is de geinduceerde afbeelding

$$i : A(X) \cong K[x_1,\dots,x_n]/I(X) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$$

injectief, en daarom ook de samenstelling

$$j_p : A(X) \longrightarrow \mathscr{O}(X) \longrightarrow \mathscr{O}_{X,p}.$$

Onder deze afbeelding worden alle elementen van $A(X) \backslash I_X(p)$ op inverteerbare elementen gestuurd, en dus bestaat er juist één ringmorfisme i_p :

$A(X)_{I_X(p)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,p}$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} A(X) \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{O}_{X,p} \\ A(X)_{I_X(p)} \arrow[ur, "i_p"'] & \end{tikzcd}$$

commuteert, met $f : A(X) \longrightarrow A(X)_{I_X(p)} : a \mapsto \frac{a}{1}$ het kanonieke morfisme. Omdat j_p injectief is, is ook i_p injectief. Verder is i_p ook surjectief: stel $[V, \varphi] \in \mathscr{O}_{X,p}$, dan bestaat er een open deel $V_p \subset V$ dat p bevat en veeltermen $f_p, g_p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zodat

$$\forall x \in V_p : g_p(x) \neq 0 \text{ en } \varphi(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)}.$$

Maar dan is

$$[V, \varphi] = \left[V_p, \frac{f_p}{g_p}\right]$$

in $\mathscr{O}_{X,p}$. Daarenboven kunnen we f_p beschouwen als element in $A(X)$ en g_p als element van $A(X) \backslash I_X(p)$, en dus

$$i_p\left(\frac{f_p}{g_p}\right) = j_p(g_p)^{-1} j_p(f_p) = [V_p, 1/g_p] \cdot [X, f_p] = \left[V_p, \frac{f_p}{g_p}\right],$$

dus is i_p surjectief en a fortiori een isomorfisme. Dit bewijst (2).

Voor (3) merken we op dat de injectieve afbeelding $A(X) \longrightarrow K(X)$ een injectieve afbeelding $Q(A(X)) \longrightarrow K(X)$ induceert. Als $[V, \varphi] \in K(X)$, dan bestaat er een punt $p \in V \neq \varnothing$, en dus $[V, \varphi] \in \mathscr{O}_{X,p} \subset Q(\mathscr{O}_{X,p}) = Q(A(X))$.

We eindigen met (1). We weten reeds dat we voor ieder punt $p \in X$, de ring $A(X)$ via i kunnen identificeren met een deelring van $\mathscr{O}(X)$, en die is op zijn beurt een deelring van $\mathscr{O}_{X,p}$. Het te bewijzen volgt nu uit de keten van inclusies

$$A(X) \subset \mathscr{O}(X) \subset \bigcap_{p \in X} \mathscr{O}_{X,p} = \bigcap_{p \in X} A(X)_{I_X(p)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \trianglelefteq A(X) \\ \text{maximaal}}} A(X)_{\mathfrak{m}} = A(X),$$

in $K(X)$, waarbij we in de voorlaatste gelijkheid de relatieve Nullstellensatz gebruiken en in de laatste Lemma 3.2.5. Klaar! $\square$

3.3. Reguliere morfismen

Definitie 3.3.1. Stel X, Y quasi-affiene variëteiten. Een regulier morfisme van X naar Y is een continue afbeelding $f : X \longrightarrow Y$ zodat voor ieder open deel $U \subset Y$ en $\varphi \in \mathscr{O}(U)$ de functie $\varphi \circ (f|_{f^{-1}(U)}) \in \mathscr{O}(f^{-1}(U))$.

We laten vaak "regulier" weg en zeggen gewoon morfisme. We noteren $\mathrm{Hom}(X, Y)$ de verzameling van alle reguliere morfismen tussen X en Y. Uit de definitie volgt onmiddellijk dat de identiteit $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X \in \mathrm{Hom}(X, X)$, en dat de samenstelling van twee reguliere morfismen opnieuw een regulier morfisme is. We bekomen dus een categorie[1] $\mathsf{QAffVar}$ met objecten de quasi-affiene variëteiten over K en morfismen de reguliere morfismen. Op een analoge manier bekomen we een categorie AffVar met objecten de affiene variëteiten en morfismen de reguliere morfismen.

We krijgen dus ook automatisch een notie van isomorfisme: een regulier morfisme $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ is een isomorfisme indien er een $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ bestaat zodat $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ en $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

Opmerking 3.3.2. Let op: een bijectief morfisme van variëteiten is niet noodzakelijk een isomorfisme, in tegenstelling tot een bijectief morfisme van groepen, ringen, of modulen (zie oefeningen).

Indien $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, dan bekomen we een morfisme

$$f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X) : \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

van algebra's. Voor twee K-algebra's A en B noteren we de verzameling van alle morfismen $A \longrightarrow B$ van K-algebra's als $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Lemma 3.3.3. *Stel $Y \subset \mathbb{A}^n$ een quasi-affiene varieteit, en stel $x_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$ de coordinaatsfuncties op $\mathbb{A}^n$. Als X een willekeurige quasi-affiene varieteit is, en $f : X \longrightarrow Y$ een afbeelding, dan is $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ als en slechts als de functies $f_i = x_i \circ f \in \mathscr{O}(X)$, voor $i = 1, \ldots, n$.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $x_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, dus als f een regulier morfisme is, dan geldt $f_i \in \mathscr{O}(X)$.

Omgekeerd, als alle $f_i \in \mathscr{O}(X)$ en $Z \subset Y$ gesloten, dan zijn er veeltermen $g_1, \ldots, g_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zodat $Z = V(g_1, \ldots, g_r) \cap Y$, en dus

$$f^{-1}(Z) = \bigcap_{j=1}^{n} (g_j \circ f)^{-1}(0).$$

Omdat $g_j \circ f$ in de algebra voortgebracht door de f_i zit, en de f_i regulier zijn, is ook iedere $g_j \circ f$ regulier. Van Eigenschap 3.1.4 weten we dus dat iedere $g_j \circ f$ continu is, en dus is $f^{-1}(Z)$ gesloten in X als doorsnede van gesloten delen. Hieruit volgt alvast dat f continu is.

Stel $U \subset Y$ open en $\varphi \in \mathscr{O}(U)$. Dan moeten we dus nog bewijzen dat $\varphi \circ (f|_{f^{-1}(U)}) \in \mathscr{O}(f^{-1}(U))$. Als $p \in f^{-1}(U)$ en $q = f(p)$, dan bestaat er een open deel $U_q \subset U$ dat q bevat en veeltermen $h, l \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zodat

$$\forall y \in U_q : l(y) \neq 0 \text{ en } \varphi(y) = \frac{h(y)}{l(y)}.$$

Maar dan is $V_p := f^{-1}(U_q) \subset f^{-1}(U)$ een open deel van $f^{-1}(U)$ dat p bevat en

$$\forall x \in V_p : (l \circ f)(x) \neq 0 \text{ en } (\varphi \circ f)(x) = \frac{(h \circ f)(x)}{(l \circ f)(x)}.$$

[1] Zie Bijlage B.

Nu zitten $(h \circ f)$ en $(l \circ f)$ weer in de algebra voortgebracht door de f_i en dus zijn dit reguliere functies op $f^{-1}(U)$, dus is f een regulier morfisme. $\square$

Les 7

Merk op dat met de notatie hierboven

$$f : X \longrightarrow Y : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)). \tag{3.3.1}$$

EIGENSCHAP 3.3.4. *Stel X een quasi-affiene varieteit en $Y \subset \mathbb{A}^n$ een affiene varieteit. Dan definieert de afbeelding*

$$(-)^* : \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X)) : f \mapsto f^*$$

een bijectie.

BEWIJS. Stel $f^* = g^*$, dan geldt voor elke i dat

$$f_i = f^*(x_i) = g^*(x_i) = g_i,$$

en dus, gebruik makende van (3.3.1), geldt ook dat $f = g$. De afbeelding $(-)^*$ is dus injectief. Stel nu $F \in \mathrm{Hom}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X))$, en merk op dat $\mathscr{O}(Y) = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}$ voor een priemideaal $\mathfrak{p}$. Definieer nu $f_i := F(\overline{x_i})$ en stel

$$f : X \longrightarrow Y : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Dit is een goed gedefinieerd regulier morfisme in $\mathrm{Hom}(X, Y)$, en $f^* = F$. Inderdaad: we gaan eerst na dat $f(X) \subset Y$: als $g \in \mathfrak{p}$, dan

$$\begin{aligned} g(f_1(x), \ldots, f_n(x)) &= g(F(\overline{x_1})(x), \ldots, F(\overline{x_n})(x)) \\ &= F(\overline{g})(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

omdat $\overline{g} = 0 \in \mathscr{O}(Y)$. Aangezien $f_i \in \mathscr{O}(X)$, volgt uit Lemma 3.3.3 dat $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, en per constructie geldt $f^* = F$. Klaar! $\square$

OPMERKING 3.3.5. Uit het voorgaande volgt nog dat er voor ieder regulier morfisme $f : X \longrightarrow Y$ tussen affiene variëteiten $X \subset \mathbb{A}^m$ en $Y \subset \mathbb{A}^n$ een regulier morfisme

$$F : \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{A}^n : (a_1, \ldots, a_m) \mapsto (F_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, F_n(a_1, \ldots, a_m)),$$

met $F_i \in K[x_1, \ldots, x_m]$ bestaat zodat er een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^m \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

bestaat, of nog: $f = F|_X$.

DEFINITIE 3.3.6. Een eindig voortgebrachte commutatieve K-algebra die een domein is noemen we een affiene K-algebra. Met AffAlg noteren we de categorie met objecten de affiene K-algebra's en morfismen de algebra morfismen.

STELLING 3.3.7. *De contravariante functor*

$$\mathscr{O} : \mathsf{AffVar} \longrightarrow \mathsf{AffAlg},$$

die een object X op $\mathscr{O}(X)$ stuurt en een morfisme $f : X \longrightarrow Y$ naar f^* is voltrouw en essentieel surjectief.

BEWIJS. Het is makkelijk na te gaan dat $\mathscr{O}$ een functor definieert. Dat de functor voltrouw is volgt onmiddellijk uit Eigenschap 3.3.4. Als R een affiene K-algebra is, dan is

$$R \cong K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p},$$

voor een priemideaal $\mathfrak{p}$, en dus is $R \cong \mathscr{O}(V(\mathfrak{p}))$, met $V(\mathfrak{p})$ een affiene varieteit. Dus is $\mathscr{O}$ ook essentieel surjectief. Klaar! □

OPMERKING 3.3.8. Deze stelling toont in feite aan dat de categorieën $\mathsf{AffVar}^{\mathsf{op}}$ en AffAlg "equivalent" zijn. In de praktijk zijn twee categorieën zelden "isomorf": dit is teveel gevraagd. Equivalentie is een zwakkere relatie, die veel vaker voorkomt, en die meestal voldoende is om zeer sterke verbanden af te leiden.

GEVOLG 3.3.9. *Twee affiene variëteiten X en Y zijn isomorf enkel en alleen indien $A(X)$ en $A(Y)$ isomorf zijn als K-algebras.*

Het is mogelijk dat een quasi-affiene varieteit isomorf is met een affiene varieteit.

VOORBEELD 3.3.10. Stel $X = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$ en $Y = V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Dan is

$$f : X \longrightarrow Y : a \mapsto (a, a^{-1})$$

een isomorfisme, met inverse $f^{-1} : Y \longrightarrow X : (x, y) \mapsto x$.

We breiden onze definitie van affiene varieteit daarom een beetje uit.

DEFINITIE 3.3.11. Een quasi-affiene varieteit X noemen we een affiene varieteit, indien ze isomorf is met een irreducibele algebraïsche verzameling.

De belangrijkste voorbeelden van affiene variëteiten met deze algemenere definitie zijn de onderscheiden open delen.

DEFINITIE 3.3.12. Stel Y een affiene varieteit, en $f \in \mathscr{O}(Y)$. Dan noemen we

$$D(f) := Y\backslash V(f) = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\}$$

het onderscheiden open deel van f in Y.

OPMERKING 3.3.13. Deze open delen hebben de volgende eigenschappen:
(1) $\forall f, g \in A(X) : D(f) \cap D(g) = D(fg)$
(2) Stel $U \subset X$ een willekeurig open deel. Dan

$$U = X\backslash V_X(f_1, \ldots, f_r) = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$$

voor zekere $f_1, \ldots, f_r \in A(X)$.

Men zegt dat de verzameling $\{D(f) \mid f \in A(X)\}$ een basis vormt voor de Zariski topologie op X.

Eigenschap 3.3.14. *Stel Y een affiene varieteit, en $f \in \mathscr{O}(Y)$. Dan is $D(f)$ een affiene varieteit, en*

$$\mathscr{O}(D(f)) \cong A(Y)_f,$$

de localisatie van $A(Y)$ aan het multiplicatief gesloten deel $\{1, f, f^2, \ldots, \}$.

Bewijs. Stel $Y = V(I) \subset \mathbb{A}^n$, en beschouw $Z = V(I + (f \cdot x_{n+1} - 1)) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Dan induceert de projectieafbeelding

$$\mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^n : (a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

een isomorfisme $Z \cong D(f)$, met inverse gegeven door $p \mapsto (p, 1/f(p))$. Het volstaat nu op te merken dat

$$\mathscr{O}(Z) \cong A(Y)[x_{n+1}]/(f \cdot x_{n+1} - 1) \cong A(Y)_f.$$

□

Zelfs met onze "nieuwe" definitie van affiene variëteiten bestaan er quasi-affiene variëteiten die niet affien zijn.

Voorbeeld 3.3.15. Stel $U = \mathbb{A}^2 \backslash \{0\}$. Dan is $\mathscr{O}(U) \cong K[x, y]$. Inderdaad, stel $f \in \mathscr{O}(U)$. Dan hebben we dus ook $f \in \mathscr{O}(D(x))$ en $f \in \mathscr{O}(D(y))$. Dus weten we van Eigenschap 3.3.14 dat er veeltermen $g, h \in K[x, y]$ bestaan, en natuurlijke getallen $n, m \in \mathbb{N}$ zodat

$$f|_{D(x)} = \frac{g}{x^m} \text{ en } f|_{D(y)} = \frac{h}{y^n},$$

en we mogen onderstellen dat $x \nmid g$ en $y \nmid h$. Op de doorsnede $D(x) \cap D(y)$ hebben we dan dat $gy^n = hx^m$. Deze vergelijking geldt echter op het gesloten deel $V(gy^n - hx^m)$ en dus ook op de sluiting $\overline{D(x) \cap D(y)} = \mathbb{A}^2$. Met andere woorden, de gelijkheid $gy^n = hx^m$ geldt in $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2) = K[x, y]$. Hieruit volgt nu makkelijk dat $m = 0$, en $n = 0$. We leiden af dat $\phi = h = g \in K[x, y]$.

We zien dus dat de restrictie $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2) \longrightarrow \mathscr{O}(U)$ een isomorfisme is. Als U nu affien zou zijn, dan impliceert Gevolg 3.3.9 dat de inclusie $U \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ een isomorfisme is, maar dit is duidelijk onzin.

HOOFDSTUK 4

Projectieve variëteiten

Van Stelling 3.3.7 weten we dat de studie van affiene variëteiten essentieel gereduceerd kan worden tot commutatieve algebra. Dit is erg handig, maar affiene variëteiten lijden desondanks aan één groot gebrek: een affiene variëteit over $\mathbb{C}$ is bijna nooit compact in de Euclidische topologie. Les 8

LEMMA 4.0.1. *Stel $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ een affiene variëteit. Als X compact is in de Euclidische topologie, dan is X eindig.*

SCHETS VAN EEN BEWIJS. Uit het Noether normalisatielemma volgt dat er een injectief algebramorfisme

$$f^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \longrightarrow \mathscr{O}(X)$$

bestaat, en dus volgt uit Eigenschap 3.3.4 dat er een regulier morfisme

$$f : X \longrightarrow \mathbb{A}^d$$

bestaat. Daarenboven maakt f^* van $\mathscr{O}(X)$ een eindig $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$-moduul, en men kan aantonen (dit volgt uit de *lying over* eigenschap) dat hieruit volgt dat f noodzakelijk surjectief is. Aangezien f de beperking is van een stel veeltermfuncties, is f continu in de Euclidische topologie, dus als X compact zou zijn in de Euclidische topologie, dan is ook het beeld $f(X) = \mathbb{A}^d$ compact, maar dit kan enkel indien $d = 0$. Hieruit volgt dat X eindig is. $\square$

Dit lijkt misschien niet zo een groot probleem, aangezien X wel compact is met de Zariski topologie (zie oefeningen). Echter, het blijkt dat compactheid in de Euclidische topologie ervoor zorgt dat een heleboel invarianten die men aan X kan associëren "eindig" zijn, en dus (in principe) berekenbaar! Dit is niet het geval voor affiene varieteiten, en daarom is het nuttig om te proberen X in te bedden in een algebraïsch meetkundig object dat wel compact is. Dit kunnen we bereiken door de projectieve sluiting $\overline{X}$ van $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ in een projectieve ruimte $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ te nemen. Het object $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ is een voorbeeld van een complexe projectieve variëteit, en in dit hoofdstuk zullen we algemene projectieve varietëiten in een projectieve ruimte $\mathbb{P}^n_k$ over een algebraïsch gesloten lichaam K bestuderen.

DEFINITIE 4.0.2. Stel $n \in \mathbb{N}$. De projectieve ruimte $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_K$ over K is de verzameling bestaande uit alle 1-dimensionale deelruimten van de vectorruimte K^{n+1}.

We kunnen $\mathbb{P}^n$ ook bekijken als een verzameling van equivalentieklassen op de verzameling $K^{n+1}\backslash\{(0,\dots,0)\}$, waarbij

$$(x_0,\dots,x_n) \sim (y_0,\dots,y_n) \Leftrightarrow \exists\lambda \in K\backslash\{0\} : (x_0,\dots,x_n) = (\lambda y_0,\dots,\lambda y_n).$$

We noteren de equivalentieklasse van een niet-nulle vector $(x_0,\dots,x_n) \in K^{n+1}$ als $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ en noemen de x_i's de homogene coördinaten van het punt $x \in \mathbb{P}^n$. Deze homogene coördinaten zijn maar bepaald op een gemeenschappelijk scalair veelvoud na, en kunnen niet allemaal gelijk zijn aan nul.

De afbeelding

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n : (x_1,\dots,x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n) \tag{4.0.1}$$

is injectief, met beeld $U_0 := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}$. We hebben analoge afbeeldingen met beeld $U_i := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$. De inverse afbeelding wordt gegeven door

$$\phi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n : (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \tag{4.0.2}$$

De coördinaten $\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$ van een punt $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in U_i$ worden de affiene coördinaten van x genoemd (t.o.v. U_i). Het is duidelijk dat

$$\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i,$$

dus de U_i vormen een overdekking van $\mathbb{P}^n$.

Verder zien we dat er een bijectieve afbeelding

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n\backslash U_i & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ (x_0 : \ldots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \cdots : x_n) & \mapsto & (x_0 : \cdots : x_{i-1} : x_{i+1} : \cdots : x_n) \end{array}$$

bestaat. We denken aan $\mathbb{P}^n\backslash U_0$ als de "punten op oneindig": als we $\mathbb{A}^n$ inbedden in $\mathbb{P}^n$ via (4.0.1) (met $i = 0$), dan ontmoeten twee verschillende rechten in $\mathbb{A}^n$ elkaar in een punt op oneindig als en slechts als ze evenwijdig zijn.

Opmerking 4.0.3. Als $K = \mathbb{C}$, dan kunnen we $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de volgende klassieke topologie geven: we zeggen dat een deel $U \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ open is als $\pi^{-1}(U)$ open is in de Euclidische topologie, waarbij

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{(0,\dots,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

de natuurlijke quotientafbeelding is. Er volgt dat $\mathbb{P}^n$ compact is, omdat $\mathbb{P}^n = \pi(S^{2n+1})$, met

$$S^{2n+1} = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x_0|^2 + \cdots + |x_n^2| = 1\}$$

een compact deel van $\mathbb{C}^{n+1}$.

4.1. Projectieve algebraïsche verzamelingen

We bespreken eerst een beetje commutatieve algebra.

DEFINITIE 4.1.1. Een gegradeerde ring (K-algebra) R is een ring (K-algebra) met voor iedere $d \in \mathbb{N}$ een abelse deelgrooep (deelvectorruimte) $R_d \subset R$ zodat

$$R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$$

als abelse groepen (vectorruimten), en $R_d \cdot R_e \subset R_{d+e}$.

Ieder element $f \in R$ heeft dus een unieke decompositie $f = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$, met $f_d \in R_d$ die we de homogene decompositie van f noemen. De grootste $d \in \mathbb{N}$ met $f_d \neq 0$ heet de graad van f, en noteren we $\deg(f)$. De elementen van $R_d \backslash \{0\}$ noemen we homogeen van graad d.

VOORBEELD 4.1.2. De veeltermring $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ is een gegradeerde K-algebra door

$$R_d := \left\{ \sum_{\substack{i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N} \\ i_0 + \cdots + i_n = d}} a_{i_0, \ldots, i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \mid a_{i_0, \ldots, i_n} \in K \right\}$$

de verzameling van alle veeltermen die lineaire combinaties zijn van monomen van graad d te stellen.

DEFINITIE 4.1.3. Een ideaal I in een gegradeerde ring R heet homogeen als het voortgebracht kan worden door homogene elementen.

EIGENSCHAP 4.1.4. *Stel I en J idealen in een gegradeerde ring R.*

(1) *Het ideaal I is homogeen als en slechts als voor alle $f \in I$, ook $f_d \in I$ voor alle $d \in \mathbb{N}$.*
(2) *Als I en J homogene idealen zijn, dan zijn ook $I + J, IJ, I \cap J$ en $\sqrt{I}$ homogeen.*
(3) *Als I een homogeen ideaal is, dan is ook R/I gegradeerd, met decompositie*

$$R/I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d/(R_d \cap I).$$

BEWIJS. We beginnen met (1). Als $I = (h_j | j \in J)$ homogeen is, en $f \in I$, dan $f = \sum_{j \in J} g_j h_j$, met $g_j \in R$ (en maar een eindig aantal $g_j \neq 0$). Stel $g_j = \sum_{d \in \mathbb{N}} g_{j,d}$ de homogene decompositie van g_j, dan geldt voor iedere $d \in \mathbb{N}$ dat

$$f_d = \sum_{\substack{j \in J, d \in \mathbb{N} \\ d + \deg(h_j) = d}} g_{j,d} h_j$$

en dus $f_d \in I$. Omgekeerd, als $I = (h_j | j \in J)$, dan geldt ook dat $I = (h_{j,d} | j \in J, d \in \mathbb{N})$ en dus is I homogeen. We gaan verder met (2). Als I en

J homogeen zijn, dan is het duidelijk dat ook $I + J$ en IJ homogeen zijn. Omdat I en J aan de equivalente voorwaarden van (1) voldoen, geldt ook dat $f \in I \cap J$ impliceert dat $f_d \in I \cap J$ voor alle $d \in \mathbb{N}$, en dus is $I \cap J$ ook homogeen. Resteert aan te tonen dat $\sqrt{I}$ homogeen is. Stel $f \in \sqrt{I}$ en $f = f_0 + \ldots + f_d$. Dan is voor een zekere $n \in \mathbb{N}$

$$f^n = (f_0 + \ldots + f_d)^n = f_d^n + \cdots \in I,$$

met f_d^n de term van hoogste graad. Uit (1) volgt dat $f_d^n \in I$, en dus $f_d \in \sqrt{I}$. Maar dan zit ook $f - f_d = f_0 + \ldots + f_{d-1} \in \sqrt{I}$, en per inductie zijn we klaar. We eindigen met (3). Het is duidelijk dat de natuurlijke afbeelding $R_d/(R_d \cap I) \longrightarrow R/I$ een injectief groepsmorfisme is, dus kunnen we $R_d/(R_d \cap I)$ als deelgroep van R/I beschouwen. Als $f \in R$ met homogene decompositie $f = \sum_d f_d$, dan is $\bar{f} = \sum_d \bar{f}_d \in R/I$ een homogene decompositie, met $f_d \in R_d/(R_d \cap I)$. Daarenboven is deze decompositie uniek: als $\sum_d \bar{f}_d = \sum_d \bar{g}_d$, dan $\sum_d (f_d - g_d) \in I$, en dus volgens (1) van de vorm $\sum_d h_d$, met $h_d \in R_d \cap I$. Maar dan is

$$\sum_d (f_d - g_d - h_d) = 0,$$

en dus $\bar{f}_d = \bar{g}_d \in R_d/(R_d \cap I)$. □

We zouden nu projectieve algebraïsche verzamelingen willen definiëren als nulpuntverzamelingen in $\mathbb{P}^n$ van veeltermen in $K[x_0, \ldots, x_n]$. We zeggen dat $p \in \mathbb{P}^n$ een nulpunt is van $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$, als $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ voor ieder stel homogene coördinaten $(x_0, \ldots, x_n)$ van p, en schrijven dit weer als $f(x) = 0$. Door f te schrijven als

$$f = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_d,$$

zien we dan dat voor iedere $\lambda \neq 0$:

$$0 = f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{d \in \mathbb{N}} \lambda^d f_d(x_0, \ldots, x_n).$$

Aangezien K algebraïsch gesloten (en dus oneindig) is, volgt dat

$$\forall d \in \mathbb{N} : f_d(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Het volstaat dus om nulpunten van homogene veeltermen te bekijken.

Definitie 4.1.5. Stel $S \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ een stel veeltermen. Dan is de projectieve nulpuntsverzameling van S gedefinieerd als

$$V(S) := \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{P}^n.$$

Verzamelingen van deze vorm noemen we projectieve algebraïsche verzamelingen.

Als I het ideaal voortgebracht door S is, dan geldt $V(I) = V(S)$.

DEFINITIE 4.1.6. Als $X \subset \mathbb{P}^n$ een willekeurige deelverzameling is, dan definiëren we

$$I(X) := \{f \in K[x_0, \ldots, x_n] \mid \forall x \in X : f(x) = 0\}.$$

Uit Eigenschap 4.1.4 en de voorgaande discussie volgt dat $I(X)$ een homogeen ideaal is. Om onderscheid te maken tussen affiene en projectieve constructies schrijven we soms nog I_a, I_p, V_a en V_p.

DEFINITIE 4.1.7. Stel $Y \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve algebraïsche verzameling. Dan noemen we

$$S(Y) = K[x_0, \ldots, x_n]/I(Y)$$

de homogene coördinaatalgebra van Y.

Uit Eigenschap 4.1.4(3) volgt dat $S(Y)$ een gegradeerde K-algebra is. We kunnen dus net zoals in het affiene geval relatieve varianten van $V(-)$ en $I(-)$ definiëren: voor een homogeen ideaal $I \trianglelefteq S(Y)$

$$V_Y(I) := \{y \in Y \mid \forall f \in I : f(y) = 0\},$$

en voor een deelverzameling $X \subset Y$

$$I_Y(X) := \{f \in S(Y) \mid \forall x \in X : f(x) = 0\}.$$

Verzamelingen van de vorm $V_Y(I)$ noemen we projectieve algebraïsche deelverzamelingen van Y. Deze komen net overeen met de projectieve algebraïsche verzamelingen die in Y zitten.

Bewijs zelf de volgende eigenschap, die volledig analoog is aan het affiene geval.

EIGENSCHAP 4.1.8. *Stel Y een projectieve algebraïsche verzameling en $X \subset Y$ een projectieve deelverzameling. Dan geldt:*

(1) *ieder homogeen ideaal in $S(Y)$ is eindig voortgebracht,*
(2) *de operaties $V_Y(-)$ en $I_Y(-)$ zijn inclusieomkerend,*
(3) $V_Y(I_Y(X)) = X$,
(4) *voor ieder homogeen ideaal $J \trianglelefteq S(Y)$ geldt er dat $J \subset I_Y(V_Y(J))$,*
(5) *het ideaal $I_Y(X)$ is radicaal,*

4.2. De projectieve Nullstellensatz

Er bestaat ook een projectieve versie van de Nullstellensatz, maar die ziet er een beetje anders uit.

VOORBEELD 4.2.1. Stel $Y \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve algebraïsche verzameling en

$$I_0 := (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n) \trianglelefteq S(Y).$$

Dit is een homogeen radicaal ideaal, maar

$$I_Y(V_Y(I_0)) = I_Y(\varnothing) = S(Y) \neq I_0 = \sqrt{I_0}.$$

Het ideal I_0 wordt ook wel het irrelevante ideaal genoemd.

Dit irrelevant ideaal blijkt echter het enige probleem te zijn. Om de projectieve Nullstellensatz te bewijzen, moeten we projectieve en affiene algebraïsche verzamelingen nog met elkaar in verband brengen.

Voor een projectieve algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{P}^n$ noemen we

$$C(X) := \{0\} \cup \{(x_0, \ldots, x_n) \mid (x_0 : \cdots : x_n) \in X)\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

de kegel over X. Merk op dat

$$X \neq \varnothing \Rightarrow I_a(C(X)) = I_p(X),$$

$$I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n] \text{ homogeen en } V_p(I) \neq \varnothing \Rightarrow C(V_p(I)) = V_a(I).$$

STELLING 4.2.2 (Projectieve Nullstellensatz). *Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ een homogeen ideaal. Dan geldt:*

(1) *$V_p(I) = \varnothing$ als en slechts als er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat I alle homogene veeltermen van graad minstens n bevat,*
(2) *als $V_p(I) \neq \varnothing$, dan $I_p(V_p(I)) = \sqrt{I}$.*

BEWIJS. Deel (1) volgt omdat $V_p(I) = \varnothing \Leftrightarrow V_a(I) \subset \{0\} \Leftrightarrow \sqrt{I} = I_a(V_a(I)) \supset (x_0, \ldots, x_n)$, waarbij we de affiene Nullstellensatz gebruikt hebben. Dit betekent dat er voor iedere i een m_i bestaat zodat $x_i^{m_i} \in I$, maar dan geldt dat

$$(x_0, \ldots, x_n)^N \subset I,$$

met $N = m_0 + \ldots + m_n$, dus bevat I alle vormen van graad minstens N. Omgekeerd, als I alle vormen van graad minstens N bevat, dan $\sqrt{I} \supset (x_0, \ldots, x_n)$. Voor deel (2) merken we op dat

$$I_p(V_p(I)) = I_a(C(V_p(I))) = I_a(V_a(I)) = \sqrt{I},$$

waarrbij we weer de affiene Nullstellensatz gebruikt hebben. □

Hieruit kan men ook weer een relatieve versie van de Nullstellensatz afleiden.

STELLING 4.2.3 (Relatieve projectieve Nullstellensatz). *Stel Y een nietlege projectieve algebraïsche verzameling, en $J \trianglelefteq S(Y)$ een homogeen ideaal zodat $\sqrt{J}$ niet het irrelevante ideaal is. Dan geldt dat $I_Y(V_Y(J)) = \sqrt{J}$. In het bijzonder is er een inclusie-omkerende bijectie*

$$\begin{array}{c} \{\textit{projectieve algebraïsche deelverzamelingen van } Y\} \\ {\scriptstyle V_Y(-)}\Big\uparrow\Big\downarrow{\scriptstyle I_Y(-)} \\ \{\textit{homogene radicale idealen in } S(Y)\} \backslash \{\textit{irrelevant ideaal}\} \end{array}$$

4.3. De Zariski topologie

De volgende eigenschap is volledig analoog aan het affiene geval.

EIGENSCHAP 4.3.1. (1) *Voor een stel deelverzamelingen* $\{S_i\}$ *van* $S(X)$ *geldt*

$$\cap_i V_p(S_i) = V_p(\cup_i S_i).$$

(2) *Voor een eindig aantal delen* $S_1, \ldots, S_n \subset S(X)$ *geldt*

$$\cup_i V_p(S_i) = V_p(S_1 \cdots S_n).$$

(3) *Als* $J_1, J_2 \trianglelefteq S(X)$ *homogene idealen zijn, dan*

$$V_p(J_1) \cap V_p(J_2) = V_p(J_1 + J_2)$$

en

$$V_p(J_1) \cup V_p(J_2) = V_p(J_1 J_2) = V_p(J_1 \cap J_2).$$

(4) *Voor willekeurige delen* $Y_1, Y_2 \subset X$ *met* X *een projectieve algebraïsche verzameling, geldt*

$$I_p(Y_1 \cup Y_2) = I_p(Y_1) \cap I_p(Y_2)$$

en indien $\sqrt{I_p(Y_1) + I_p(Y_2)} \neq I_0$, *ook*

$$I_p(Y_1 \cap Y_2) = \sqrt{I_p(Y_1) + I_p(Y_2)}.$$

We kunnen de Zariski topologie dus analoog aan het affiene geval definiëren.

DEFINITIE 4.3.2. De Zariski topologie op een projectieve algebraïsche verzameling X is de topologie met gesloten delen $V_p(S)$, met $S \subset S(X)$.

De Zariski topologie op een projectieve algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{P}^n$ komt overeen met de spoortopologie komende van de Zariski topologie op $\mathbb{P}^n$. In het bijzonder kunnen we dus ook spreken over de samenhangendheid, irreducibiliteit, en dimensie van een projectieve algebraïsche verzameling.

DEFINITIE 4.3.3. Een irreducibele projectieve algebraïsche verzameling noemen we een projectieve variëteit. Een niet-leeg open deel van een projectieve variëteit noemen we een quasi-projectieve variëteit. Een variëteit is per definitie een affiene, quasi-affiene, projectieve, of quasi-projectieve variëteit.

Zoals verwacht kan men aantonen dat $\mathbb{P}^n$ een projectieve variëteit is, en $\dim(\mathbb{P}^n) = n$. Het is ook nog altijd waar dat een projectieve algebraïsche verzameling X irreducibel is als en slechts als $S(X)$ een domein is. We vermelden nog volgende eigenschap zonder bewijs.

EIGENSCHAP 4.3.4. *Voor* $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ *niet-lege projectieve variëteiten geldt dat:*

(1) $\dim C(X) = \dim X + 1$
(2) *Als* $\dim(X) + \dim(Y) \geq n$, *dan* $X \cap Y \neq \varnothing$

Deze eigenschap veralgemeent het feit dat twee rechten in $\mathbb{P}^2$ elkaar altijd snijden.

We willen nu ook nog nagaan dat onder de inclusie (4.0.1) de Zariski topologie op $\mathbb{A}^n$ overeenkomt met de spoortopologie van $\mathbb{P}^n$. Hiervoor maken we gebruik van homogenisatie.

Definitie 4.3.5. Voor een niet-nulle veelterm

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \in K[x_1,\ldots,x_n]$$

van graad d definiëren we de homogenisatie f^h als

$$\begin{aligned} f^h &= x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,I_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n} x_0^{d-i_1-\ldots-i_n} x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_n} \in K[x_0,\ldots,x_n] \end{aligned}$$

Voor een ideal $I \trianglelefteq K[x_1,\ldots,x_n]$ definiëren we de homogenisatie $I^h \trianglelefteq K[x_0,\ldots,x_n]$ als het ideaal voortgebracht door alle f^h, met $f \in I$.

Definitie 4.3.6. Een continue afbeelding $f : X \longrightarrow Y$ tussen topologische ruimten wordt een homeomorfisme genoemd indien ze een continue inverse $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ heeft.

Eigenschap 4.3.7. *De afbeelding*

$$\begin{aligned} F_0 : \mathbb{A}^n &\longrightarrow U_0 \\ (x_1,\ldots,x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n) \end{aligned}$$

definiëert een homeomorfismes tussen $\mathbb{A}^n$ met de Zariski topologie en $U_0 \subset \mathbb{P}^n$ met de spoortopologie. Hetzelfde geldt voor U_i.

Bewijs. Het volstaat het geval $F = F_0$ te beschouwen. Het is duidelijk dat F een bijectie is, en U_0 een open deel is van $\mathbb{P}^n$. Er geldt:

(1) Als $X = V_p(S) \cap U_0$ een gesloten deel is in U_0, dan is $F^{-1}(X) = V_a(\{f(1,-) \mid f \in S\})$ gesloten in de Zariski topologie op $\mathbb{A}^n$, dus F is continu.
(2) Als $X = V_a(S)$ gesloten is in de Zariski topologie op $\mathbb{A}^n$, dan is $FX = V_p(\{f^h \mid f \in S\}) \cap U_0$ gesloten in de spoortopologie op U_0.

Klaar! □

Gevolg 4.3.8. *Als $Y \subset \mathbb{P}^n$ een (quasi-)projectieve algebraïsche verzameling is, dan is Y bedekt door de open delen $Y \cap U_i$, voor $i = 0,\ldots,n$, die homeomorf zijn met (quasi-)affiene algebraische verzamelingen via de afbeeldingen F_i.*

We kunnen dus homogenisatie gebruiken om een affiene variëteit $X \subset \mathbb{A}^n$ via F_0X te beschrijven in termen van homogene coördinaten op $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$. Meestal laten we F_0 weg in de notatie. Natuurlijk geldt deze discussie even goed voor U_i.

EIGENSCHAP 4.3.9. *Stel $I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ een willekeurig ideaal. Beschouw $X = V_a(I) \subset \mathbb{A}^n$, en $\overline{X} := \overline{F_0 X} \subset \mathbb{P}^n$ de projectieve sluiting. Dan geldt:*

(1) $\overline{X} = V_p(I^h)$,
(2) *als* $I = (f)$, *dan* $\overline{X} = V_p(f^h)$.

4.4. Reguliere functies en morfismen

In tegenstelling tot bij de affiene situatie bepalen de elementen van $S(X)$ geen functies op X: zelfs als $f \in S(X)_d$, dan geldt er enkel maar dat $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$, en dit is meestal niet gelijk aan $f(x)$. Dit kunnen we als volgt oplossen.

DEFINITIE 4.4.1. Stel $U \subset \mathbb{P}^n$ een quasi-projectieve varieteit, en $p \in U$. Een functie $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ heet regulier in p indien er een open deel $U_p \subset U$ bestaat dat p bevat en homogene veeltermen $f_p, g_p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ van dezelfde graad, zodat

$$\forall x \in U_p : g_p(x) \neq 0 \text{ en } \varphi(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)}.$$

Als $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^1$ regulier is in ieder punt $p \in U$, dan zeggen we dat φ een reguliere functie is.

Net zoals voorheen noteren we $\mathscr{O}(U)$ voor de K-algebra van reguliere functies op U. Een reguliere functie is weer altijd continu (ga na). De definitie van een morfisme tussen variëteiten is nu exact hetzelfde als Definitie 3.1.1, en we kunnen ook het functielichaam en de lokale ring in een punt van een variëteit definiëren zoals in het vorige hoofdstuk. Les 9

EIGENSCHAP 4.4.2. *Stel $X \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve algebraïsche verzameling. Dan is $U_i \cap X$ isomorf met een affiene algebraïsche verzameling voor alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.*

BEWIJS. Het volstaat weer de eigenschap te bewijzen voor $i = 0$. Stel dat $X = V_p(h_1, \ldots, h_r)$ voor homogene veeltermen $h_i \in K[x_0, \ldots, x_n]$ en stel

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = h_j(1, x_1, \ldots, x_n).$$

Als $Y := V_a(g_1, \ldots, g_r)$, dan beweren we dat

$$F : Y \longrightarrow U_0 \cap X : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n)$$

een isomorfisme is, met inverse

$$F^{-1} : U_0 \cap X \longrightarrow Y : (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Het is duidelijk dat deze afbeelding goed gedefinieerd zijn, en elkaars inverse zijn. Uit Eigenschap 4.3.7 volgt makkelijk dat F en F^{-1} continu zijn. Het volstaat dus nog na te gaan dat F en F^{-1} reguliere functies terugtrekken tot reguliere functies: een reguliere functie op een open deel van U_0 is lokaal van de vorm

$$\frac{p(x_0,\dots,x_n)}{q(x_0,\dots,x_n)},$$

voor homogene polynomen p en q van dezelfde graad. Maar dan is

$$F^*\frac{p(x_0,\dots,x_n)}{q(x_0,\dots,x_n)} = \frac{p(1,x_1,\dots,x_n)}{q(1,x_1,\dots,x_n)}$$

een quotiënt van veeltermen, en dus een reguliere functie op Y. Omgekeerd hebben we dat

$$(F^{-1})^*\frac{r(x_1,\dots,x_n)}{s(x_1,\dots,x_n)} = \frac{r\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)}{s\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)}$$

hetgeen een reguliere functie is op U_0 omdat deze breuk herschreven kan worden als een quotiënt van twee homogene veeltermen van dezelfde graad (door teller en noemer te vermenigvuldigen met x_0^m met $m = \max\{\deg(s), \deg(r)\}$). Dus is F een isomorfisme. Klaar! $\square$

We zien dus dat iedere projectieve variëteit te overdekken is door een eindig aantal affiene variëteiten, op een manier die compatibel is met de topologie, maar ook met de reguliere functies. Hieruit volgt bijvoorbeeld dat we als we de lokale ring in een punt bekijken, we ons kunnen beperken tot het affiene geval.

Gevolg 4.4.3. *Stel $X \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve variëteit en $x \in X$. Als $x \in U_i \cap X$, dan*

$$\mathscr{O}_{X,x} = \mathscr{O}_{U_i\cap X,x} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^m,x},$$

waarbij we in het laatste isomorfisme x identificeren met het bijhorende punt in $\mathbb{A}^m$ via (4.0.2).

Tenslotte tonen we nog hoe een groot aantal morfismen tussen projectieve variëteiten te construeren. Hiervoor hebben we het volgende lemma nodig, dat ook in meer algemene situaties nuttig is.

Lemma 4.4.4. *Stel $f : X \longrightarrow Y$ een afbeelding tussen variëteiten. Als er een open overdekking $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ van X bestaat zodat alle restricties $f|_{U_i} : U_i \longrightarrow Y$ reguliere morfismen zijn, dan is ook f een regulier morfisme.*

Bewijs. We gaan eerst na dat f continu is: stel $V \subset Y$ open. Dan geldt dat

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_{i\in I}(f|_{U_i}^{-1})(V)$$

open is als unie van open delen. Stel nu $V \subset Y$ een open deel, en $\varphi \in \mathscr{O}(V)$. Dan geldt

$$(f^*\varphi)|_{U_i\cap f^{-1}(V)} = (f|_{U_i\cap f^{-1}(V)})^*\varphi \in \mathscr{O}(U_i \cap f^{-1}(V)) \tag{4.4.1}$$

aangezien $f|_{U_i}$, en dus ook $f|_{U_i \cap f^{-1}(V)}$ een morfisme is. Uit (4.4.1) volgt dat ook $f^*\varphi \in \mathscr{O}(f^{-1}(V))$. Klaar! $\square$

EIGENSCHAP 4.4.5. *Stel $X \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve variëteit, en $f_0, \ldots, f_m \in S(X)$ homogene elementen van dezelfde graad. Op het open deel $U := X \backslash V_p(f_0, \ldots, f_m)$ definiëren deze veeltermen een morfisme*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^m : x \mapsto (f_0(x) : \cdots : f_m(x))$$

BEWIJS. Merk eerst en vooral op dat de afbeelding goed gedefinieerd is, aangezien $f(x)$ nooit gelijk kan zijn aan $(0 : \cdots : 0)$ voor $x \in U$, en daarenboven geldt voor $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in U$ dat

$$\begin{aligned} f(\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n) &= (f_0(\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n) : \cdots : f_m(\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n)) \\ &= (\lambda^d f_0(x_0 : \cdots : x_n) : \cdots : \lambda^d f_m(x_0 : \cdots : x_n)) \\ &= (f_0(x) : \cdots : f_m(x)), \end{aligned}$$

met d de graad van de f_i's. Om na te gaan dat f een regulier morfisme definieert gebruiken we Lemma 4.4.4. Stel $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^m V_i$ de standaard open overdekking van $\mathbb{P}^n$, met $V_i = \{(y_0 : \cdots : y_m) \in \mathbb{P}^m \mid y_i \neq 0\}$. Dan is

$$U = \bigcup_{i=0}^m U_i := \bigcup_{i=0}^m f^{-1}(V_i)$$

een open overdekking van U, met

$$f^{-1}(V_i) = \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}.$$

In affiene coördinaten op V_i wordt $f|_{U_i}$ gegeven door een quotiënt van veeltermen f_j/f_i voor $j = 0, \ldots, m$ met $j \neq i$, en dit zijn reguliere functies op U_i door Definitie 4.4.1. Uit Lemma 3.3.3 en de opmerking erna volgt dus dat alle $f|_{U_i}$ reguliere morfismen zijn, en dus is ook f een regulier morfisme door Lemma 4.4.4. Klaar! $\square$

VOORBEELD 4.4.6. Stel $A \in \mathsf{GL}_{n+1}(K)$. Dan is

$$f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n : x \mapsto Ax$$

een isomorfisme, met inverse $f^{-1}(x) = A^{-1}x$. Dergelijke isomorfismen noemen we projectieve automorfismen van $\mathbb{P}^n$. Vaak zeggen we ook dat f een projectieve coördinatentransformatie definiëert.

HOOFDSTUK 5

De stelling van Bézout

In dit hoofdstuk zullen we het aantal punten in de doorsnede van twee variëteiten proberen te bepalen, in geval dit aantal eindig is. Als $C = V(f)$ en $D = V(g)$ bijvoorbeeld twee krommen in het vlak zijn, die geen irreducibele component gemeenschappelijk hebben, dan zullen we zien dat het aantal punten in de doorsnede $C \cap D$ hoogstens $\deg(f) \cdot \deg(g)$ is, en dit wordt zelfs een gelijkheid indien we punten met de correcte multipliciteit tellen. Dit betekent in het bijzonder dat het aantal punten in de doorsnede enkel van de graden van f en g afhangt, en niet van de veeltermen zelf: dit is een directe veralgemening van het feit dat een veelterm van graad d in één verandelijke exact d nulpunten heeft, indien we ze tellen met correcte multipliciteit.

We zullen hier alle technologie die we gezien hebben nodig hebben. Inderdaad:

(1) om correcte intersectiemultipliciteiten te definiëren, bvb. voor twee vlakke krommen X en Y, moeten we werken met het niet noodzakelijk radicale ideaal $I(X) + I(Y)$. Om deze reden zal commutatieve algebra in dit hoofdstuk weer een belangrijke rol spelen,

(2) de meest eenvoudige toepassing van Bézout is dat twee verschillende rechten in het vlak elkaar snijden in 1 punt. Dit is duidelijk niet correct in de affiene setting, aangezien de rechten evenwijdig zouden kunnen zijn. Om deze reden zullen we moeten werken met projectieve variëteiten.

In dit hoofdstuk zullen we dus vooral homogene idealen in veeltermringen zullen bestuderen.

5.1. Hilbertfuncties

Definitie 5.1.1. Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \dots, x_n]$ een homogeen ideaal. Dan noemen we de functie

$$h_I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : d \mapsto \dim_K(K[x_0, \dots, x_n]_d / I_d)$$

de Hilbertfunctie van I. Voor een projectieve verzameling $X \subset \mathbb{P}^n$ stellen we $h_X := h_{I(X)}$, dus

$$h_X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : d \mapsto \dim_K S(X)_d.$$

Dit is de Hilbertfunctie van X.

Merk op dat de Hilbertfunctie goed gedefinieerd is ten gevolge van Eigenschap 4.1.4(3).

EIGENSCHAP 5.1.2. *De Hilbertfunctie van een ideaal is invariant onder projectieve automorfismen (cfr. Voorbeeld 4.4.6).*

BEWIJS. Een inverteerbare matrix $A \in \mathsf{GL}_{n+1}(K)$ horend bij een projectief automorfisme $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ definiëert ook een isomorfisme $\mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$, en dus door Eigenschap 3.3.4 een isomorfisme $K[x_0, \ldots, x_n] \longrightarrow K[x_0, \ldots, x_n]$ van K-algebras. Aangezien dit isomorfisme de gradatie respecteert, heeft ieder ideaal dezelfde Hilbertfunctie als zijn beeld onder dit isomorfisme. $\square$

VOORBEELD 5.1.3.

(1) Stel $X = \mathbb{P}^n$. Dan
$$h_X(d) = \dim_K K[x_0, \ldots, x_n]_d = \binom{n+d}{n}$$
voor alle $d \in \mathbb{N}$.

(2) Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ een homogeen ideaal met $V_p(I) = \varnothing$. Dan volgt uit de projectieve Nullstellensatz dat er een N bestaat zodat I alle monomen van graad minstens N bevat, en dus $I_d = K[x_0, \ldots, x_n]_d$ voor $d \geq N$. Hieruit volgt dat $h_I(d) = 0$ voor $d \geq N$.

(3) Stel $X = \{p\}$, met $p \in \mathbb{P}^n$. Dan mogen we door Eigenschap 5.1.2 veronderstellen dat $p = (1 : 0 : \cdots : 0)$, en dus $I(p) = (x_1, \ldots, x_n)$. Hieruit volgt dat $S(X) \cong K[x_0]$ en dus $h_X(d) = 1$ voor alle $d \in \mathbb{N}$.

Om met Hilbertfuncties te kunnen rekenen is het makkelijk om exacte rijen te gebruiken. Stel $f : U \longrightarrow V$ en $g : V \longrightarrow W$ lineaire afbeeldingen tussen vectorruimtes over K. Stel dat f injectief is, g surjectief en $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$. Dit noteren we als

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0 \tag{5.1.1}$$

en we noemen (5.1.1) een korte exacte rij. Gebruik je kennis van lineaire algebra om het volgende lemma te bewijzen.

LEMMA 5.1.4. *In een korte exacte rij (met V eindig dimensionaal) geldt dat* $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$.

EIGENSCHAP 5.1.5. *Voor twee homogene idealen $I, J \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ hebben we dat*
$$h_{I \cap J} + h_{I+J} = h_I + h_J.$$

BEWIJS. Stel $R = K[x_0, \ldots, x_n]$. Dan is het makkelijk na te gaan dat

$$0 \longrightarrow R/(I \cap J) \xrightarrow{f} R/I \times R/J \xrightarrow{g} R/(I + J) \longrightarrow 0, \tag{5.1.2}$$

met $f(\overline{r}) = (\overline{r}, \overline{r})$ en $g(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{r} - \overline{s}$, een korte exacte rij is. Inderdaad, injectiviteit van f en surjectiviteit van g zijn duidelijk, dus we gaan enkel na dat $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Als $(\overline{r}, \overline{s}) \in \ker(g)$, dan is $g(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{r} - \overline{s} = 0 \in R/(I+J)$, en dus $r + i = s + j$ voor zekere $i \in I, j \in J$. Dan geldt:

$$f(\overline{r+i}) = (\overline{r+i}, \overline{r+i}) = (\overline{r}, \overline{s+j}) = (\overline{r}, \overline{s}),$$

en dus $(\overline{r}, \overline{s}) \in \mathrm{im}(f)$. Dit bewijst dat $\ker(g) \subset \mathrm{im}(f)$, en de andere inclusie is duidelijk. Neem nu voor elke $d \in \mathbb{N}$ het deel van graad d in (5.1.2) en pas Lemma 5.1.4 toe (waarom mag dit?). □

We zullen nu aan de hand van enkele voorbeelden bekijken welke informatie de Hilbertfunctie bevat.

Eigenschap 5.1.6. *Stel $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ projectieve algebraïsche verzamelingen zodat $X \cap Y = \varnothing$. Dan geldt*

$$h_{X\cup Y}(d) = h_X(d) + h_Y(d),$$

voor bijna alle[1] $d \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Uit Eigenschap 4.3.1 volgt dat $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$, en ook

$$V(I(X) + I(Y)) = V(I(X)) \cap V(I(Y)) = X \cap Y = \varnothing.$$

Uit Voorbeeld 5.1.3(2) volgt dan dat $h_{I(X)+I(Y)}(d) = 0$ voor bijna alle d, en dus volgt uit Eigenschap 5.1.5 dat

$$h_{X\cup Y}(d) = h_X(d) + h_Y(d),$$

voor bijna alle d. Klaar! □

Hieruit volgt nog dat voor $X = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{P}^n$ met $p_i \in \mathbb{P}^n$ geldt dat

$$h_X(d) = k, \tag{5.1.3}$$

voor bijna alle $d \in \mathbb{N}$.

Voorbeeld 5.1.7. Stel $X = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}^2$. Als we onderstellen dat de drie punten op één rechte liggen, dan bestaat er een lineaire veelterm in $K[x_0, x_1, x_2]$ die nul is op X, en dus $\dim_K I(X)_1 = 1$. Maar dan geldt

$$h_X(1) = \dim_K K[x_0, x_1, x_2]_1/I(X)_1 = 3 - 1 = 2.$$

Als de drie punten niet op één rechte liggen, dan bestaat er geen lineaire veelterm die nul is op X, en dus

$$h_X(1) = \dim_K K[x_0, x_1, x_2]_1/I(X)_1 = 3 - 0 = 3.$$

Hieruit zien we dat de Hilbertfunctie niet invariant is onder willekeurige isomorfismen (van X in dit geval).

Samenvattend kunnen we dus stellen dat voor eindige verzamelingen $X \subset \mathbb{P}^n$, de Hilbertfunctie $h_X(d)$ de volgende informatie encodeert:

- het aantal elementen van X voor grote waarden van d,
- de relatieve positie van de punten van X voor kleine waarden van d.

[1] Hiermee bedoelen we: voor alle $d \in \mathbb{N}$ behalve voor een eindig aantal.

5.2. Hilbert veeltermen

Uit het voorgaande leren we dat om het aantal punten in een doorsnede $X \cap Y$ te bepalen we, gebruik makend van Eigenschap 4.3.1, moeten begrijpen hoe de Hilbertfunctie van de som $I(X) + I(Y)$ eruit ziet, voor grote waarden van d. Het volgende lemma toont aan hoe dit te doen als een van de idealen een hoofdideaal is, onder een technische voorwaarde.

LEMMA 5.2.1. *Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ een homogeen ideaal, en $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ een veelterm van graad e. Veronderstel verder dat*

(5.2.1)

$$\exists d_0 \in \mathbb{N} : \forall g \in K[x_0, \ldots, x_n] \text{ homogeen}, \deg(g) \geq d_0 : fg \in I \Rightarrow g \in I.$$

Dan geldt:

$$h_{I+(f)}(d) = h_I(d) - h_I(d-e),$$

voor bijna alle $d \in \mathbb{N}$.

BEWIJS. Stel $R = K[x_0, \ldots, x_n]$. Dan bestaat er voor alle d met $d - e \geq d_0$ een korte exacte rij

$$0 \longrightarrow R_{d-e}/I_{d-e} \xrightarrow{(-)\cdot f} R_d/I_d \longrightarrow R_d/(I + (f))_d \longrightarrow 0,$$

waarbij de derde afbeelding de quotiëntafbeelding is. Merk op dat we (5.2.1) gebruiken voor injectiviteit. Het volstaat nu weer om Lemma 5.1.4 toe te passen. $\square$

Om van de bizarre technische conditie (5.2.1) af te raken bespreken we (zonder bewijs) de Stelling van Lasker-Noether uit de commutatieve algebra. Een echt ideaal $I \trianglelefteq R$ in een commutatieve ring R heet primair als

$$\forall f, g \in R : fg \in R \Rightarrow f \in I \text{ of } g \in \sqrt{I}.$$

Het is duidelijk dat ieder priemideaal primair is, maar het omgekeerde is niet waar.

VOORBEELD 5.2.2. Het ideaal $I = (x^n) \trianglelefteq K[x]$ is altijd primair, maar is enkel priem voor $n = 1$. Merk echter op dat $\sqrt{I}$ een priemideaal is.

STELLING 5.2.3 (Stelling van Lasker-Noether). [**Mat80**, (8.G)] *Stel $I \trianglelefteq R$ een willekeurig ideaal in een noetherse ring R. Dan bestaat er een decompositie*

$$I = I_0 \cap \cdots \cap I_r,$$

met $I_1, \ldots, I_r \trianglelefteq R$ primaire idealen.

Indien we $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ stellen, dan is het makkelijk in te zien dat iedere $V_a(I_i)$ irreducibel is, en dus geeft de bovenstaande stelling een decompositie in irreducibele delen

$$V_a(I) = V_a(I_1) \cup \cdots \cup V_a(I_r).$$

De Stelling van Lasker-Noether is dus een verfijnde versie van Stelling 2.6.20.

Les 10

LEMMA 5.2.4. *Stel $I \trianglelefteq K[x_0,\dots,x_n]$ een homogeen ideaal. Op een homogene lineaire coördinaatsverandering na voldoet $f := x_0$ aan voorwaarde (5.2.1).*

BEWIJS. We schrijven $I = I_0 \cap \dots \cap I_r$ zoals in Stelling 5.2.3. Stel nu dat g een homogene veelterm is en $gx_0 \in I_i$ voor alle i. Dan onderscheiden we twee gevallen:

(1) als $V_a(I_i) \subset \{0\}$, dan volgt uit de affiene Nullstellensatz dat $\sqrt{I_i} \supset (x_0,\dots,x_n)$. Dan volgt dus weer dat $K[x_0,\dots,x_n]_d \subset I_i$ voor $d \gg 0$, en dus $g \in I_i$ als de graad van g groot genoeg is.
(2) als $V_a(I_i) \not\subset \{0\}$, dan volgt, eventueel na een homogeen lineaire coördinaatsverandering, dat $V_a(I_i) \not\subset V_a(x_0)$. Dus x_0 is niet nul op $V_a(I_i)$, en dus $x_0 \notin I_a(V_a(I_i)) = \sqrt{I_i}$. Omdat I_i primair is, besluiten we dat $g \in I_i$.

□

Het volgende resultaat toont aan dat als $d \to \infty$, de Hilbertfunctie $h_I(d)$ zich gedraagt als een veelterm in d.

STELLING 5.2.5. *Stel $I \trianglelefteq K[x_0,\dots,x_n]$ een homogeen ideaal. Dan bestaat er een unieke veelterm $\chi_I \in \mathbb{Q}[x]$ zodat $\chi_I(d) = h_I(d)$ voor bijna alle $d \in \mathbb{N}$. Daarenboven geldt:*

(1) *de graad van χ_I is $m := \dim V_p(I)$,*
(2) *als $V_p(I) \neq \varnothing$, dan is de hoogstegraadscoëfficiënt van χ_I gelijk aan*

$$\chi_I^{top} = \frac{k}{m!},$$

voor een $0 \neq k \in \mathbb{N}$.

BEWIJS. We tonen het bestaan van χ_I aan door inductie op $m := \dim V_p(I)$. Het basisgeval volgt uit Voorbeeld 5.1.3(2): als $V_p(I) = \varnothing$, dan kunnen we $\chi_I = 0$ stellen. Laat ons nu onderstellen dat $V_p(I) \neq \varnothing$. Door een homogeen lineaire coördinaatsverandering toe te passen (dit verandert de Hilbertfunctie niet door Eigenschap 5.1.2) mogen we onderstellen dat x_0 niet nul is op de irreducibele componenten van $V_p(I)$ (zie oefeningen). Uit Gevolg 2.7.15 volgt dan dat

$$\dim V_p(I + (x_0)) \leq m - 1,$$

en door onze inductiehypothese weten we dus $h_{I+(x_0)}(d)$ zich als een veelterm van graad hoogstens $m-1$ gedraagt, als $d \gg 0$. We kiezen de volgende ietwat bizarre basis van de vectorruimte van veeltermen in $\mathbb{Q}[x]$ van graad ten hoogste $m-1$:

$$\begin{aligned}\binom{x}{0} &:= 1\\ \binom{x}{1} &:= x\\ \binom{x}{2} &:= \frac{1}{2}(x^2-x)\\ &\vdots\\ \binom{x}{m-1} &:= \prod_{i=1}^{m-1}\frac{x+1-i}{i}\end{aligned}$$

zodat we $h_{I+(x_0)}(d)$ kunnen schrijven als

$$h_{I+(x_0)}(d)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\binom{d}{i},$$

voor zekere $c_i \in \mathbb{Q}$, en $d \gg 0$. Door Lemma 5.2.4 mogen we onderstellen dat Lemma 5.2.1 van toepassing is voor $f = x_0$, en dus

$$h_I(d)-h_I(d-1)=h_{I+(x_0)}(d)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\binom{d}{i}, \tag{5.2.8}$$

voor $d \gg 0$, stel voor $d > d_0$. Kies nu een constante $c \in \mathbb{Q}$ zodat

$$h_I(d_0)=c+\sum_{i=0}^{m-1}c_i\binom{d_0+1}{i+1}. \tag{5.2.9}$$

We tonen nu per inductie op d, beginnende met $d = d_0$, aan dat

$$h_I(d)=c+\sum_{i=0}^{m-1}c_i\binom{d+1}{i+1}, \tag{5.2.10}$$

voor $d \geq d_0$. Het basisgeval is triviaal, omdat we c net zo gekozen hebben. Maar dan geldt voor alle grotere waarden van d dat

$$\begin{aligned}h_I(d+1) &= h_I(d)+\sum_{i=0}^{m-1}c_i\binom{d+1}{i}\\ &= c+\sum_{i=0}^{m-1}c_i\left(\binom{d+1}{i+1}+\binom{d+1}{i}\right)\\ &= c+\sum_{i=0}^{m-1}c_i\binom{d+2}{i+1}\end{aligned}$$

gebruik makend van (5.2.8) en de inductiehypothese. Aangezien de rechterzijde van (5.2.10) een veelterm is in d (van graad hoogstens m), hebben we aangetoond dat χ_I bestaat. De uniciteit volgt onmiddellijk omdat twee veeltermen die gelijk zijn op oneindig veel waarden gelijk zijn. Tenslotte tonen we nog aan dat indien $V_p(I) \neq \varnothing$, de coëfficiënt van d^m in χ_I gelijk is aan $1/m!$ maal een positief natuurlijk getal, hetgeen (1) en (2) aantoont. We bewijzen dit weer per inductie op m:

- $m = 0$: in dit geval is $\chi_I = k$ constant, en k is een natuurlijk getal, aangezien het een dimensie bepaalt voor $d \gg 0$. Daarenboven kan k niet gelijk zijn aan 0, omdat anders $I_d = K[x_0, \ldots, x_n]_d$ voor een zekere d, en dus $V_p(I) = \varnothing$.
- $m > 0$: in dit geval heeft $V_p(I)$ een irreducibele component X van dimensie m (en geen component van grotere dimensie). Uit Eigenschap 4.3.4 volgt dat $V_p(x_0) \cap X \neq \varnothing$, en $\dim(V_p(x_0) \cap X) = m-1$ door Gevolg 2.7.15. Dus geldt er dat $\dim V_p(I+(x_0)) = m-1$, en door de inductiehypothese is $\chi_{I+(x_0)}$ een veelterm van graad $m-1$, en is $(m-1)!$ maal de hoogstegraadscoëfficiënt een positief natuurlijk getal. Maar uit het bewijs hierboven volgt dat dit getal net c_{m-1} is, hetgeen dan ook $m!$ maal de hoogstegraadscoëfficiënt van χ_I is door (5.2.10).

□

De veelterm χ_I noemen we de Hilbert veelterm van I. Voor een projectieve algebraïsche verzameling X stellen we $\chi_X := \chi_{I(X)}$.

Opmerking 5.2.6. Een "ander" bewijs voor het bestaan van de Hilbert veelterm maakt gebruik van de zogenaamde Hilbert syzygie stelling. In moderne taal zegt deze stelling dat er voor ieder eindig voortgebracht moduul M over de veeltermring $K[x_1, \ldots, x_n]$ een lange exacte rij[2]

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow L_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{5.2.14}$$

bestaat, met alle L_i vrije modulen, en zodat $k \leq n$ (deze grens is sterk). Men zeg ook nog dat de "globale dimensie" van $K[x_1, \ldots, x_n]$ gelijk is aan n. Dit is het prille begin van het gebruik van methoden uit de homologe algebra in commutatieve algebra en algebraïsche meetkunde.

5.3. De stelling van Bézout

Definitie 5.3.1. Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ een homogeen ideaal zodat $V_p(I) \neq \varnothing$, en stel $m := \dim V_p(I)$. Dan noemen we

$$\deg I := m! \chi_I^{top} \in \mathbb{N}$$

de graad van I.

Merk op dat de graad van I goed gedefinieerd is door Stelling 5.2.5. Voor een projectieve algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{P}^n$ definiëren we $\deg X := \deg I(X)$.

[2] Alle afbeeldingen in (5.2.14) zijn dus moduulmorfismen en de kern van iedere afbeelding valt samen met het beeld van de voorgaande afbeelding.

OPMERKING 5.3.2. Klassiek werd de graad van een projectieve variëteit $Y \subset \mathbb{P}^n$ van dimensie d gedefinieerd als het aantal punten in de doorsnede van Y met een voldoende generieke lineaire deelruimte L van complementaire dimensie $n-r$. In plaats van "voldoende generiek" precies te maken, volgen wij de algebraïsche aanpak gebaseerd op Hilbert veeltermen.

VOORBEELD 5.3.3.
(1) De graad van $\mathbb{P}^n$ is $n!$ maal de d^n-coëfficiënt van $\binom{n+d}{n}$, dus $\deg \mathbb{P}^n = n! \cdot \frac{1}{n!} = 1$.
(2) De graad van een punt $p \in \mathbb{P}^n$ is $\deg\{p\} = 0! \cdot 1 = 1$.
(3) Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ een homogeen ideaal zodat $V_p(I)$ eindig is met r elementen. Dan is $\dim V_p(I) = 0$, en dus $\chi_I = \deg I$. Anderzijds is $\chi_{\sqrt{I}} = r$ door (5.1.3). Aangezien $I \subset \sqrt{I}$ geldt er dus
$$r = \chi_{\sqrt{I}} \leq \chi_I = \deg I.$$

STELLING 5.3.4 (De stelling van Bézout). *Stel $X \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve algebraïsche verzameling met $\dim(X) \geq 1$, en $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ een homogene veelterm zodat voor iedere irreducibele component X_i van X geldt dat $f|_{X_i} \neq 0$. Dan geldt:*
$$\deg(I(X) + (f)) = \deg X \cdot \deg f$$

BEWIJS. Stel $m = \dim(X)$. Dan is de Hilbert veelterm van X gelijk aan
$$\chi_X(d) = \frac{\deg X}{m!} d^m + a d^{m-1} + \cdots$$
met $a \in \mathbb{Q}$. Stel $e := \deg f$. Aangezien f niet verdwijnt op een irreducibele component van X, is $f \neq 0$ in de domeinen $S(X_i)$ (zie oefeningen). Als $gf \in I(X)$, dan is $gf = 0 \in S(X_i)$, en dus $g = 0 \in S(X_i)$, of nog $g \in I(X)$. Dus voldoen $I(X)$ en f aan de voorwaarden van Lemma 5.2.1, en bekomen we
$$\begin{aligned}
\chi_{I(X)+(f)}(d) &= \chi_X(d) - \chi_X(d-e) \\
&= \frac{\deg X}{m!}(d^m - (d-e)^m) + a(d^{m-1} - (d-e)^{m-1}) + \cdots \\
&= \frac{e \deg X}{(m-1)!} d^{m-1} + \cdots,
\end{aligned}$$
en dus bekomen we
$$\deg(I(X) + (f)) = e \deg X = \deg X \cdot \deg f.$$
□

VOORBEELD 5.3.5. Stel $I = (f) \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ een hoofdideaal. Dan impliceert de combinatie van Stelling 5.3.4 en Voorbeeld 5.3.3 dat
$$\deg I = \deg((0) + (f)) = \deg \mathbb{P}^n \cdot \deg f = \deg f.$$
Dus geldt in het bijzonder voor een hyperoppervlak $X = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ dat $\deg X = \deg f$. Het is om deze reden dat we $\deg X$ de graad hebben genoemd.

In de rest van deze sectie zullen we ons concentreren op het specifieke geval van projectieve krommen. Een projectieve kromme is per definitie een projectieve algebraïsche verzameling $C \subset \mathbb{P}^n$ waarvan alle irreducibele componenten dimensie 1 hebben.

GEVOLG 5.3.6 (Bézout voor krommen). (1) *Stel $C \subset \mathbb{P}^n$ een kromme, en $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ homogeen zodat voor iedere irreducibele component C_i van C, $f|_{C_i} \neq 0$. Dan geldt:*

$$|C \cap V(f)| \leq \deg C \cdot \deg f.$$

(2) *Voor twee krommen $C, D \subset \mathbb{P}^2$ zonder gemeenschappelijke irreducibele componenten geldt er dat:*

$$|C \cap D| \leq \deg C \cdot \deg D.$$

BEWIJS. Aangezien f op geen enkele C_i nul is, volgt uit Krull's Hauptidealsatz dat $\dim(C \cap V(f)) = 0$, en dus is $C \cap V(f)$ eindig (zie oefeningen). Aangezien $V(I(C) + (f)) = C \cap V(f)$, volgt uit Bézout en Voorbeeld 3 dat

$$|C \cap V(f)| \leq \deg(I(C) + (f)) = \deg C \cdot \deg f.$$

Deel (2) volgt uit deel (1) omdat $C = V(g)$, voor een homogene veelterm $g \in K[x_0, x_1, x_2]$ (zie oefeningen) en Voorbeeld 5.3.5. □

Dit gevolg kan veel preciezer gemaakt worden door gebruik te maken van de lokale ringen in de eindig aantal punten van $C \cap V(f)$. Hoewel we alle tools hebben om deze verfijning volledig te bewijzen, zullen we ons tevreden stellen met het beschrijven van de resultaten. Les 11

Stel $I \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$ homogeen met $V_p(I)$ eindig, en $a \in \mathbb{P}^n$. Kies een affien deel $U_i \subset \mathbb{P}^n$ zodat $a \in U_i$, en stel $J \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ het bijhorende affiene ideaal:

$$J := \{f(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mid f \in I\}.$$

Dan noemen we

$$\mathrm{mult}_a(I) := \dim_K \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a}/J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a}$$

de multipliciteit van I in a, waarbij $J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a}$ het ideaal voortgebracht door de elementen $\frac{f}{1}$, met $f \in J$ is, en we $a \in U_i$ identificeren met het corresponderende punt in $\mathbb{A}^n$ door de bijectie (4.0.1). Deze multipliciteit is eindig en blijkt niet af te hangen van het gekozen affiene deel. Als $C \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve kromme is, $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ homogeen zodat voor iedere irreducibele component C_i van C, $f|_{C_i} \neq 0$, en $a \in C$, dan noemen we

$$\mathrm{mult}_a(C, f) := \mathrm{mult}_a(I(C) + (f))$$

de multipliciteit van f in a. In het geval $n = 2$, en $D = V(g) \subset \mathbb{P}^2$ een tweede kromme die geen irreducibele component met C deelt, definiëren we de intersectiemultiplicitiet van C en D in a als

$$\mathrm{mult}_a(C, D) := \mathrm{mult}_a(I(C) + I(D))$$

GEVOLG 5.3.7 (Bézout voor krommen, lokale versie). (1) *Stel* $C \subset \mathbb{P}^n$ *een kromme, en* $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ *homogeen zodat voor iedere irreducibele component* C_i *van* C, $f|_{C_i} \neq 0$. *Dan geldt:*

$$\sum_{a \in C \cap V(f)} \mathrm{mult}_a(C, f) = \deg C \cdot \deg f.$$

(2) *Voor twee krommen* $C, D \subset \mathbb{P}^2$ *zonder gemeenschappelijke irreducibele componenten geldt er dat:*

$$\sum_{a \in C \cap D} \mathrm{mult}_a(C, D) = \deg C \cdot \deg D.$$

Het bewijs hiervan volgt uit Stelling 5.3.4 door een grondige analyse van projectieve algebraïsche verzamelingen van dimensie 0 te maken. De strategie is als volgt: als

$$C \cap V(f) = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{P}^n,$$

dan mogen we onderstellen dat ieder punt a_i een niet-nulle x_0-coördinaat heeft (door eventueel een homogene coördinatentransformatie toe te passen), en dus $C \cap V(f) \subset U_0$. We stellen dan

$$J := \{f(1, x_1 \dots, x_n) \mid f \in I(C) + (f)\},$$

en men kan aantonen dat er een keten van gelijkheden

$$\begin{aligned}
\deg(I(C) + (f)) &= \chi_{I(C)+(f)} \\
&= \dim_K K[x_1, \dots, x_n]/J \\
&= \sum_{i=1}^{r} \dim_K \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n, a_i}/J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n, a_i} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathrm{mult}_{a_i}(C, f)
\end{aligned}$$

bestaat. Laat ons dit kort toelichten: de eerste gelijkheid volgt uit wat we reeds gezien hebben. De tweede gelijkheid volgt omdat $I(C) + (f)$ de homogenisatie is van J.

VOORBEELD 5.3.8. Als $I = ((x_1 - ax_0)^2, (x_2 - bx_0)^3) \trianglelefteq K[x_0, x_1, x_2]$ zodat $V_p(I) = \{(1 : a : b)\}$, dan is $I = J^h$, met $J = ((x_1 - a)^2, (x_2 - b)^3) \trianglelefteq K[x_1, x_2]$. Ga dan na dat $\dim_K K[x_1, x_2]/J = 6$, en

$$h_I(d) = \begin{cases} 1 & d = 0 \\ 3 & d = 1 \\ 5 & d = 3 \\ 6 & d \geq 4 \end{cases}$$

We zien dus inderdaad dat $\chi_I = \dim_K(K[x_1, x_2]/J)$.

Dit voorbeeld is makkelijk te veralgemenen maar we zullen dit niet doen. De derde gelijkheid volgt omdat men kan aantonen dat voor ieder ideaal $J \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ met $V_a(J) = \{a_1, \ldots, a_r\}$ eindig geldt dat

$$K[x_1, \ldots, x_n]/J \cong \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a_1}}{J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a_1}} \times \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a_2}}{J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a_2}} \times \cdots \times \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a_r}}{J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,a_r}}$$

De laatste gelijkheid is net de definitie van multipliciteit. Het volstaat nu Stelling 5.3.4 toe te passen. Laat ons deze stelling in een voorbeeld bekijken.

VOORBEELD 5.3.9. Stel $C = V_p(x_0x_2 - x_1^2)$ en $D = V_p(x_2)$ twee krommen in $\mathbb{P}^2$. Uit Voorbeeld 5.3.5 volgt dat $\deg C = 2$ en $\deg D = 1$. Verder bestaat

$$C \cap D = \{a = (1 : 0 : 0)\}$$

uit 1 punt in U_0. We berekenen

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_a(C, D) &= \dim_K \mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(x_2 - x_1^2, x_2) \\ &= \dim_K \mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(x_1^2, x_2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit Eigenschap 3.2.6 aangezien

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(x_1^2, x_2) \cong K[x_1, x_2]_{(x_1,x_2)}/(x_1^2, x_2) \cong K[x_1, x_2]/(x_1^2, x_2) \cong K[x_1]/(x_1^2).$$

We zien dus inderdaad dat

$$\mathrm{mult}_a(C, D) = \deg C \cdot \deg D,$$

zoals voorspeld door de lokale versie van Bézout.

5.4. Toepassingen van Bézout

In deze laatste sectie bespreken we enkele van de vele toepassingen van de Stelling van Bézout. Deze sectie is vooral bedoeld als advertentie voor meer gevorderde vakken, en we zullen dan ook niet erg precies zijn.

Onze eerste toepassing toont hoe Bézout kan helpen het aantal generatoren van een ideaal horende bij een algebraïsche verzameling te begrenzen.

EIGENSCHAP 5.4.1. *Stel $C \subset \mathbb{P}^3$ een kromme die niet in een echte lineaire deelruimte van $\mathbb{P}^3$ bevat zit. Als $\deg(C)$ een priemgetal is, dan kan $I(X)$ niet door twee elementen voortgebracht worden.*

BEWIJS. Stel $I(C) = (f, g)$, met $f, g \in K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ homogeen. Dan verdwijnt g niet op een irreducibele component van $V(f)$, omdat C anders dimensie 2 zou hebben. Dus kunnen we de Stelling van Bézout toepassen:

$$\deg C = \deg((f) + (g)) = \deg f \cdot \deg g,$$

en aangezien $\deg C$ een priemgetal is, moet $\deg f = 1$ of $\deg g = 1$, en dus moet een van deze twee veeltermen lineair zijn, contradictie! $\square$

In Voorbeeld 4.4.6 hebben we projectieve automorfismen van $\mathbb{P}^n$ geintroduceerd. Met behulp van Bézout kunnen we aantonen dat ieder automorfisme van $\mathbb{P}^n$ van die vorm is.

STELLING 5.4.2. *Ieder isomorfisme $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ is lineair: er bestaat een $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ zodat $f(x) = Ax$.*

BEWIJS. Stel $H \subset \mathbb{P}^n$ een hypervlak, en $L \subset \mathbb{P}^n$ een rechte die niet in H ligt. Dan bestaat de doorsnede $L \cap H$ uit 1 punt met multipliciteit 1. Aangezien f een isomorfisme is, zullen $f(L)$ en $f(H)$ terug een kromme, respectievelijk een hyperoppervlak zijn, die snijden in 1 punt met multipliciteit 1. Uit de lokale versie van Bézout volgt dan dat

$$\deg f(L) \cdot \deg f(H) = 1,$$

en dus $\deg f(H) = 1$. We leiden hieruit af dat f hypervlakken naar hypervlakken stuurt.

Door f eventueel met een projectief automorfisme samen te stellen, mogen we dus onderstellen dat f het affiene deel $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \backslash V(x_0)$ isomorf op zichzelf afbeeldt. Door over te gaan op affiene coördinaten $x_1, \ldots, x_n$, leiden we uit bovenstaand argument af dat

$$f^{-1}(V(x_i)) = V(f^* x_i)$$

een affiene lineaire ruimte is voor iedere i, en dus moet $f^* x_i$ een macht zijn van een lineaire veelterm. Maar aangezien $f^* : K[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow K[x_1, \ldots, x_n]$ een isomorfisme is, beeldt f^* irreducibele veeltermen op irreducibele veeltermen, en dus is $f^* x_i$ lineair voor iedere i. $\square$

We hebben de noties van gladheid en singulariteit niet behandeld in deze cursus. Men kan voor een variëteit X en een punt $x \in X$ op een algebraïsche manieer een raakruimte $T_x X$ invoeren, die de structuur van een K-vectorruimte draagt. We zeggen dan dat X glad is in x als $\dim_K T_x X = \dim X$. Als X niet glad is in x, dan zeggen we dat x een singulier punt is van x. Voor twee affiene krommen $C = V(f), D = V(g) \subset \mathbb{A}^2$ en een punt $x \in C \cap D$, zeggen we dat C en D elkaar transvers snijden in x als C en D glad zijn in x, en de raakruimtes in x (beschouwd als deelruimtes van $\mathbb{A}^2$) zijn verschillend. Men kan aantonen dat C en D elkaar transvers snijden in x als en slechts als $\dim_K \mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,x}/(f,g) = 1$. Hiermee kan men dan de volgende verrassende stelling bewijzen.

STELLING 5.4.3. *Stel $C \subset \mathbb{P}^2$ een irreducibele kromme van graad d. Dan kan C hoogstens $\binom{d-1}{2}$ singuliere punten hebben.*

BEWIJS. In de oefeningen hebben we reeds gezien dat irreducibele krommen van graad 1 en 2 isomorf zijn met $\mathbb{P}^1$, en dus glad zijn. Het volstaat dus deze stelling te bewijzen voor $d \geq 3$. Onderstel dat C onderling verschillende singuliere punten

$$a_1, \ldots, a_{\binom{d-1}{2}+1} \in C$$

heeft. Kies dan willekeurig $d-3$ andere punten $b_1, \ldots, b_{d-3} \in C$, zodat het totaal aantal punten

$$\binom{d-1}{2} + 1 + (d-3) = \binom{d}{2} - 1$$

is. Dan beweren we dat er een kromme D van graad hoogstens $d-2$ bestaat die door al deze punten gaat. Inderdaad, de ruimte $K[x_0, x_1, x_2]_{d-2}$ van alle homogene veeltermen van graad $d-2$ in drie variabelen is een K-vectorruimte van dimensie $\binom{d}{2}$, waarbij we de coëfficiënten van een dergelijke veelterm als coördinaten beschouwen. De conditie dat zo'n veelterm verdwijnt in een gegeven punt geeft een homogene lineaire vergelijking in deze coördinaten. Aangezien $\binom{d}{2} - 1$ homogene lineaire vergelijkingen in een vectorruimte van dimensie $\binom{d}{2}$ altijd een niet-triviale oplossing hebben, besluiten we dat er een niet-nulle veelterm $f \in K[x_0, x_1, x_2]_{d-2}$ bestaat die nul is in in alle a_i en b_j. Voor de bijhorende kromme $D = V_p(f)$ geldt dan dat

$$\deg D \leq d - 2,$$

en D gaat door al de punten a_i en b_j. Aangezien C irreducibel is, en van grotere graad dan D, kunnen C en D geen irreducibele component gemeenschappelijk hebben, en dus volgt uit de lokale versie van Bézout dat

$$\sum_{i=1}^{\binom{d-1}{2}+1} \mathrm{mult}_{a_i}(C, D) + \sum_{j=1}^{d-3} \mathrm{mult}_{b_j}(C, D) \leq \deg C \cdot \deg D \leq d(d-2).$$

Aangezien C singulier is in alle a_i, volgt uit de discussie boven de stelling dat $\mathrm{mult}_{a_i}(C, D) > 1$ (door eventueel op een affien deel over te gaan), en dus is het linkerlid in bovenstaande ongelijkheid groter dan of gelijk aan

$$2 \cdot \left(\binom{d-1}{2} + 1 \right) + (d-3) = d(d-2) + 1 > d(d-2),$$

maar dit is een contradictie! □

De stelling van Bézout blijkt zelfs zodanig sterk te zijn dat ze ook in staat is te helpen niet-triviale stellingen over reële krommen in de Euclidische topologie te bewijzen. Als $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ een gladde projectieve kromme is, dan is C in de Euclidische topologie een compacte 1-dimensionale differentiaalvariëteit. Dit betekent nog dat C een disjuncte unie is van eindig veel samenhangscomponenten, die elk homeomorf zijn met een cirkel. Ieder zo'n cirkel noemen we een lus van C. Met een analoog bewijs als Stelling 5.4.3 kan men ook de volgende stelling aantonen, zie bijvoorbeeld [**Har95**, Theorem 19.18].

STELLING 5.4.4 (Stelling van Harnack). *Een gladde projectieve kromme van graad d in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ heeft hoogstens $\binom{d-1}{2} + 1$ lussen.*

Als $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ een gladde complexe projectieve kromme is, dan is C met de Euclidische topologie een samenhangende, compacte en oriënteerbare 2-dimensionale differentiaalvariëteit. Zo een variëteit is altijd homeomorf met een sfeer met een eindig aantal "handvaten". Dit aantal handvaten noemen we het genus $g(C)$ van C. Ook over dit ogenschijnbaar ongerelateerd concept uit de topologie heeft Bézout iets in de pap te brokken, zie [**Kir92**, Ch. 4] voor een bewijs.

Stelling 5.4.5 (De graad-genus formule). *Een gladde projectieve kromme $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ van graad d heeft genus*

$$g(C) = \binom{d-1}{2}.$$

We weten al dat een gladde projectieve kromme $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ van graad 1 of 2 isomorf is met $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Het is welbekend dat $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ met de Euclidische topologie homeomorf is met de Riemann sfeer $S^2_{\mathbb{R}}$, en dus zien we inderdaad dat $g(C) = 0$. Voor meer toepassingen van Bézout verwijzen we naar [**Ful89**].

5.5. En nu?

Het is welbekend dat iedere eerste cursus algebraïsche meetkunde gedoemd is om te mislukken. Behalve al de eigenschappen en stellingen die we zonder bewijs vermeld hebben, zijn er vele klassieke onderwerpen die we hadden moeten zien, maar waar we geen tijd voor hebben gehad. Een greep uit de collectie:

- Elliptische krommen en hun abelse groepsstructuur
- Gladheid van variëteiten
- Rationale afbeeldingen en transcendentiegraad
- Divisoren op krommen
- Compleetheid van projectieve variëteiten
- Meer voorbeelden van projectieve variëteiten en klassieke constructies (Grassmannianen, Segre en Veronese inbedding, opblazen van punten, . . .)
- Lineaire algebraïsche groepen

Een tweede cursus behandelt typisch de "moderne" algebraïsche meetkunde à la Serre en Grothendieck, waarin schoven, schema's, en cohomologie een centrale rol spelen. Alvorens hiermee te beginnen zou het echter nuttig zijn om enkele van de bovenstaande onderwerpen te bestuderen. Ik kan ten zeerste [**Gat18**] van Andreas Gathmann aanraden, waarop een groot deel van deze nota's gebaseerd zijn. Behalve de onderwerpen die wij behandeld hebben, bespreekt hij ook al degene hierboven en meer (inclusief een introductie tot schoven van functies). Voor een goed overzicht van de mogelijke boeken die er zijn, met een korte beschrijving van hun inhoud en focus, kun je een kijkje nemen naar deze url.

BIJLAGE A

Enkele resultaten over commutatieve ringen

We bespreken veeltermringen hier in meer detail en herhalen enkele eigenschappen en stellingen uit de cursus Ring- en Moduultheorie de gebruikt worden in deze tekst. We veronderstellen dat al onze ringen commutatief zijn.

A.1. Veeltermringen

Zij R een ring. Een R-algebra is een ring A die ook een R-moduul is, zodanig dat de vermenigvuldiging $m : A \times A \longrightarrow A$ R-bilineair is. Een morfisme van R-algebras is een ringmorfisme dat tegelijkertijd R-lineair is.

Als $\varphi : R \longrightarrow S$ een morfisme tussen commutatieve ringen is, dan is S een R-algebra: S is een R-moduul via restrictie van scalairen:

$$r \cdot s = \varphi(r)s.$$

Het is makkelijk na te gaan dat de vermenigvuldiging op S R-bilineair is:

$$(r \cdot s)t = (\varphi(r)s)t = \varphi(r)st = r \cdot (st).$$

LEMMA A.1.1. *Neem twee morfismen $\varphi : R \longrightarrow S$ en $\psi : R \longrightarrow T$ tussen commutatieve ringen. Een ringmorfisme $f : S \longrightarrow T$ is een algebra morfisme als en alleen als $f \circ \varphi = \psi$.*

BEWIJS. Onderstel dat f een algebra morfisme is. Dan geldt voor alle $r \in R$ dat

$$(f \circ \varphi)(r) = f(\varphi(r)) = f(r \cdot 1_S) = r \cdot f(1_S) = \psi(r)1_T = \psi(r),$$

en dus is $f \circ \varphi = \psi$. Omgekeerd, onderstel dat $f \circ \varphi = \psi$. Voor alle $r \in R$ en $s \in S$ hebben we dat

$$f(r \cdot s) = f(\varphi(r)s) = f(\varphi(r))f(s) = \psi(r)f(s) = r \cdot f(s).$$

□

Zij R een commutatieve ring. We noteren $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ voor de veeltermring in n veranderlijken. Een algebraïsche basis van $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ als R-moduul is

$$\{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \mid i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}\}.$$

De elementen van deze basis worden monomen genoemd, en elke veelterm is dus op unieke manier te schrijven als een (eindige) lineaire combinatie van monomen. De vermenigvuldiging wordt gedefinieerd door de formule

$$(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n})(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}) = x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}$$

en door het feit dat de vermenigvuldiging bilineair is. De veeltermring $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ is een commutatieve ring, en zelfs een R-algebra. We hebben een injectief ringmorfisme

$$i : R \longrightarrow R[x_1, \ldots, x_n] : r \mapsto r.$$

Per definitie noemen we $i_1+i_2+\cdots+i_n$ de graad van het monoom $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$. Een veelterm f noemen we homogeen van graad m als hij een lineaire combinatie is van monomen van graad m. We noemen f ook een vorm van graad m. Elke veelterm f kan op unieke manier geschreven worden onder de vorm

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$$

waarbij f_i een vorm van graad i is. Als $f_d \neq 0$, dan zeggen we dat f van graad d is, genoteerd $\deg(f) = d$. Als R een domein is, dan geldt

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

De volgende eigenschap staat bekend als de universele eigenschap van $R[x_1, \ldots, x_n]$.

Eigenschap A.1.2. *Zij $\varphi : R \longrightarrow S$ een morfisme van commutatieve ringen. Dan bestaat er voor ieder n-tupel $(s_1, \ldots, s_n) \in S^{\times n}$ een uniek morfisme $\tilde{s} : R[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow S$ van R-algebras zodat het diagram*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R[x_1, \ldots, x_n] \arrow[d, "\tilde{s}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

commuteert, en zodat $\tilde{s}(x_i) = s_i$.

A.2. Enkele resultaten uit Ring- en Moduultheorie

We herhalen nu enkele definities, eigenschappen en stellingen uit de cursus Ring- en Moduultheorie.

Stelling A.2.1 (Eerste isomorfismestelling). *Stel $f : R \longrightarrow S$ een morfisme van ringen. Dan is $\mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq R$ een ideaal en*

$$R/\mathrm{Ker(f)} \cong f(R).$$

Stel $f : R \longrightarrow S$ een ringmorfisme. Voor een ideaal $J \trianglelefteq S$, is $f^{-1}(J)$ een ideaal dat we de contractie van J noemen, en J^c noteren. Als $I \trianglelefteq R$, dan kunnen we het ideaal voortgebracht door $f(I)$ beschouwen. Dit noteren we I^e en noemen we de extensie van I.

Stelling A.2.2 (Tweede isomorfismestelling). *Stel $I \trianglelefteq R$ een ideaal. Dan definieren contractie en extensie met betrekking tot het quotientmorfisme $f : R \longrightarrow R/I$ een bijectie tussen de idealen in R/I, en de idealen van R die I bevatten.*

Een ideaal $I \trianglelefteq R$ is:

(1) priem als en slechts als R/I een domein is,
(2) maximaal als en slechts als R/I een lichaam is.

LEMMA A.2.3 (Lemma van Zorn). *Stel S een partieel geordende verzameling. Als ieder totaal geordend deel van S een bovengrens (respectievelijk ondergrens) heeft, dan bevat S een maximaal (respectievelijk minimaal) element.*

Stel $I \trianglelefteq R$ een ideaal. Uit het Lemma van Zorn volgt dat er een maximaal ideal $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ bestaat dat I bevat.

Een ring R heet noethers als elke stijgende keten idealen in R stationnair is, of nog, als alle idealen eindig voortgebracht zijn. Als R noethers is, dan is ook $R[x]$ noethers. In het bijzonder is de veeltermring $K[x_1, \ldots, x_n]$ over een lichaam noethers.

Twee idealen $I, J \trianglelefteq R$ heten comaximaal als $I + J = R$. Als $I, J \trianglelefteq R$ comaximaal zijn, dan $I \cap J = IJ$.

STELLING A.2.4 (Chinese Reststelling). *Stel $I_1, \ldots, I_n \trianglelefteq R$ twee aan twee comaximale ideaalen. Dan induceert de natuurlijke afbeelding $R \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} R/I_j$ een isomorfisme*

$$R/\cap_{j=1}^{n} I_j \cong \prod_{j=1}^{n} R/I_j.$$

Stel $S \subset R$ een multiplicatief gesloten deel. Dan is de afbeelding

$$f : R \longrightarrow S^{-1}R : r \mapsto \frac{r}{1}$$

een ringmorfisme met kern

$$\mathrm{Ker}(f) = \{r \in R \mid \exists s \in S : rs = 0\}.$$

Als R daarenboven een domein is, en $0 \notin S$, dan is f injectief.

EIGENSCHAP A.2.5. *Stel R, T ringen en $S \subset R$ een multiplicatief gesloten deel. Als $\varphi : R \longrightarrow T$ een ringmorfisme is zodat alle elementen van $\varphi(S)$ inverteerbaar zijn in T, dan bestaat er een uniek ringmorfisme $\tilde{\varphi} : S^{-1}R \longrightarrow T$ zodat het diagram*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & T \\ S^{-1}R \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

commuteert

Herinner dat een ring R lokaal heet als R een uniek maximaal ideaal heeft. Een ring R is lokaal als en slechts als de niet-inverteerbare elementen een ideaal vormen. Dit ideaal is dan het unieke maximale ideaal. Stel $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$

een priemideaal en stel $S = R\backslash\mathfrak{p}$. De ring $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$ is een lokale ring, en het unieke maximale ideaal is de extensie $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ onder f.

Een niet-inverteerbaar element $a \in R$ wordt irreducibel genoemd als

$$a = bc \Rightarrow b \text{ of } c \text{ is inverteerbaar in } R.$$

Voor een domein R geldt:

$$(a) \text{ priemideaal} \Rightarrow a \text{ irreducibel}$$

en de omgekeerde implicatie geldt indien R een uniek factorisatiedomein (UFD) is. Als R een hoofideaaldomein (PID) is, dan is ieder priemideaal $\mathfrak{p} \neq (0)$ maximaal. De veeltermring $K[x]$ in 1 veranderlijke over een lichaam K is een hoofdideaaldomein. Ieder PID is een uniek factorisatiedomein (UFD).

Stel R een domein met breukenlichaam $K = Q(R)$. Een veelterm $f \in R[x]$ heet primitief als ieder element van R dat f deelt inverteerbaar is.

Stelling A.2.6 (Lemma van Gauss). *Stel R een UFD. Als $f, g \in R[x]$ primitief zijn, dan is ook het product $fg \in R[x]$ primitief.*

Stelling A.2.7. *Stel R een UFD. Een veelterm $f \in R[x]$ is irreducibel als en slechts als aan een van de volgende twee voorwaarden is voldaan:*

(1) *f is constant, en is irreducibel als element van R,*
(2) *f is primitief en irreducibel in $K[x]$.*

Als R een UFD is, dan is ook $R[x]$ een UFD. In het bijzonder is de veeltermring $K[x_1, \ldots, x_n]$ over een lichaam een UFD.

A.3. Priemidealen in integrale uitbreidingen

We vermelden hier nog zonder bewijs enkele belangrijke resultaten uit commutatieve algebra, die gaan over het gedrag van priemidealen in (integrale) ringuitbreidingen. Stel $i : R \hookrightarrow S$ een inclusie van ringen. We beschouwen integraliteit, extensie en contractie van idealen altijd ten opzichte van deze inclusie.

Stelling A.3.1 (Lying Over). *Stel $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ een priemideaal.*

(1) *Er bestaat een priemideaal $\mathfrak{p}' \trianglelefteq S$ zodat $(\mathfrak{p}')^c = \mathfrak{p}$ als en slechts als $\mathfrak{p}^e \cap R \subset \mathfrak{p}$.*
(2) *Als S integraal is over R, dan geldt (1) altijd.*

In dit geval zeggen we dat $\mathfrak{p}'$ boven $\mathfrak{p}$ ligt.

Stelling A.3.2 (Incomparability). *Stel S integraal over R. Als $\mathfrak{p}'$ en $\mathfrak{q}'$ twee verschillende priemidealen zijn in S, zodat $(\mathfrak{p}')^c = (\mathfrak{q}')^c$, dan $\mathfrak{p}' \not\subset \mathfrak{q}'$ en $\mathfrak{q}' \not\subset \mathfrak{p}'$.*

Stelling A.3.3 (Going Up). *Stel S integraal over R. Stel $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{q}$ priemidealen in R, zodat $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, en $\mathfrak{p}'$ een priemideaal in S, zodat $(\mathfrak{p}')^c = \mathfrak{p}$. Dan bestaat er een priemideaal $\mathfrak{q}'$ in S zodat $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ en $(\mathfrak{q}')^c = \mathfrak{q}$.*

We zeggen dat een domein R integraal gesloten, of normaal, is, indien de verzameling van elementen van $Q(R)$ die integraal zijn over R gelijk is aan R.

STELLING A.3.4 (Going Down). *Stel S integraal over R, R normaal, en S een domein. Stel $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ priemidealen in R, en $\mathfrak{q}'$ een priemideaal in S zodat $(\mathfrak{q}')^c = \mathfrak{q}$. Dan bestaat er een priemideaal $\mathfrak{p}'$ in S zodat $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ en $(\mathfrak{p}')^c = \mathfrak{p}$.*

Probeer zelf aan de hand van Stelling 3.3.4 een meetkundige interpretatie van deze stellingen te geven in het geval R en S de coordinaat algebra's van affiene variëteiten zijn.

BIJLAGE B

Categorieën en functoren

We voeren hier enkele basisdefinities uit de categorietheorie in op een informele manier. Een standaard referentie is het boek [**Mac71**] van Maclane.

Definitie B.0.1. Een categorie C bestaat uit:

(1) een klasse $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ van objecten,
(2) voor elke twee objecten A, B in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, een verzameling $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$, die we de morfismen tussen A en B noemen,
(3) voor elke drie objecten A, B en C in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, een afbeelding

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

die we de samenstelling noemen,
(4) voor elk object A in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ een morfisme $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A)$ dat we de identeit op A noemen,

die voldoen aan:

(1) associativiteit: voor $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C)$, en $h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, D)$ geldt dat $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
(2) identitiet: $f \circ \mathrm{id}_A = f$ en $\mathrm{id}_A \circ g = g$, voor $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ en $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, A)$.

Opmerking B.0.2. Sommige auteurs gebruiken dit als definitie voor een lokaal kleine categorie.

Als het duidelijk is met welke categorie we werken, schrijven we ook $\mathrm{Hom}(A, B)$ in plaats van $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$.

Definitie B.0.3. Een (contravariante) functor $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ tussen twee categorieën C en D bestaat uit

(1) een afbeelding $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) : A \mapsto FA$
(2) een afbeelding $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(FB, FA) : f \mapsto Ff$ voor ieder paar objecten A, B in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$

zodat aan de volgende twee condities is voldaan:

(1) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$ voor ieder object A in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
(2) $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$ voor alle morfismen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ en $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C)$

We zeggen dat twee objecten A en B in een categorie C isomorf zijn, en schrijven $A \cong B$, indien er morfismen $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ en $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(B, A)$ bestaan zodat $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ en $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.

Definitie B.0.4. Stel $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ een functor.

(1) F heet trouw als de afbeelding $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(FB, FA)$ injectief is voor ieder paar objecten A, B in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
(2) F heet vol als de afbeelding $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(FB, FA)$ surjectief is voor ieder paar objecten A, B in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
(3) F heet voltrouw als de afbeelding $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(FB, FA)$ bijectief is voor ieder paar objecten A, B in $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
(4) F heet essentieel surjectief als er voor ieder object X van D een object A van C bestaat zodat $X \cong FA$.

Bibliografie

[Eis95] D. Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[Ful89] W. Fulton, *Algebraic curves*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. An introduction to algebraic geometry, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original.

[Gat18] A. Gathmann, *Algebraic geometry*, Available at https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/en/alggeom.php, 2018.

[Har95] J. Harris, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[Hil90] D. Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. **36** (1890), no. 4, 473–534.

[Hil93] ———, *Ueber die vollen Invariantensysteme*, Math. Ann. **42** (1893), no. 3, 313–373.

[Jac45] N. Jacobson, *A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **31** (1945), 333–338.

[Kir92] F. Kirwan, *Complex algebraic curves*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 23, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Kru28] W. Krull, *Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen*, S.-B. Heidelberg Akad. Weiss **7** (1928).

[LB16] L. Le Bruyn, *Did Nöbeling discover toposes?*, 2016.

[Mac71] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[Mat80] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Second, Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.

[Noe26] E. Noether, *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **1926** (1926), 28–35.

[Rab30] J. L. Rabinowitsch, *Zum Hilbertschen Nullstellensatz*, Math. Ann. **102** (1930), no. 1, 520.

[Sha77] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Study, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974.

[SSS70] J. Seebach Jr., L. Seebach, and L. Steen, *What is a sheaf?*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 681–703.

[Sta19] The Stacks project authors, *The stacks project*, 2019.

[Zar47] O. Zariski, *A new proof of Hilbert's Nullstellensatz*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 362–368.

[Zar52] ———, *The fundamental ideas of abstract algebraic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2, 1952, pp. 77–89.