INLEIDING ALGEBRAÏSCHE MEETKUNDE — OEFENINGEN

Vrije Universiteit Brussel
Ba3 Wiskunde

door Theo Raedschelders

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1. Affiene varieteiten 5
1.1. Affiene algebraische verzamelingen 5
1.2. Het ideaal horend bij een stel nulpunten 5
1.3. Integrale uitbreidingen en Noethers normalisatielemma 6
1.4. Hilberts Nullstellensatz 7
1.5. De Zariski topologie 7
1.6. Krull dimensie 8

Hoofdstuk 2. Reguliere functies en morfismen 9
2.1. Reguliere functies 9
2.2. Reguliere morfismen 9

Hoofdstuk 3. Projectieve variëteiten 11
3.1. Projectieve algebraïsche verzamelingen 11
3.2. De Zariski topologie 11
3.3. Reguliere functies en morfismen 12

Hoofdstuk 4. De Stelling van Bézout 13
4.1. Hilbertfuncties 13
4.2. Hilbert veeltermen 13
4.3. De stelling van Bézout 13

HOOFDSTUK 1

Affiene varieteiten

1.1. Affiene algebraische verzamelingen

(1) Gebruik je kennis van lineaire algebra om de 3 vragen uit de inleiding op te lossen in het geval we naar een stelsel lineaire vergelijkingen kijken.
(2) Toon aan dat er in $K[x]$ een oneindig aantal irreducibele veeltermen zijn.
(3) Toon aan dat een algebraisch gesloten lichaam oneindig is.
(4) Toon aan dat $(x, y) \trianglelefteq K[x, y]$ geen hoofideaal is.
(5) Toon dat als K eindig is, iedere deelverzameling in $\mathbb{A}^n_K$ algebraisch is.
(6) Stel $C = V(F)$ een affiene vlakke kromme (dus $F \in K[x, y]$ een niet-constante veelterm), en L een rechte in $\mathbb{A}^2_K$ zodat $L \not\subset C$. Als de graad van F gelijk is aan n, toon dan aan dat de doorsnede $L \cap C$ uit hoogstens n punten bestaat.
(7) Toon dat de volgende verzamelingen niet algebraisch zijn:
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \mid y = \sin(x)\}$
   (b) $\{(z, w) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$
(8) Stel R een UFD. Toon aan:
   (a) een monische veelterm van graad 2 of 3 in $R[x]$ is irreducibel als en slechts als deze geen wortel in R heeft,
   (b) $x^2 - a$ is irreducibel als en slechts als a geen kwadraat is in R.

1.2. Het ideaal horend bij een stel nulpunten

(1) Als K een oneindig lichaam is, toon dan aan dat $I(\mathbb{A}^n_K) = 0$.
(2) Bewijs dat iedere eindig-dimensionale commutatieve $\mathbb{C}$-algebra A, die voortgebracht wordt door 1 element van de vorm

$$\mathbb{C}^{\times n_1} \times \frac{\mathbb{C}[x]}{(x^2)}^{\times n_2} \times \cdots \times \frac{\mathbb{C}[x]}{(x^m)}^{\times n_m}$$

is voor zekere getallen $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$.
(3) Een $r \in R$ heet nilpotent indien $\exists n \in \mathbb{N} : r^n = 0$. Indien R geen niet-nulle nilpotenten heeft, zeggen we dat R gereduceerd is. Stel $I \trianglelefteq R$ en toon aan: I is een radicaal ideaal $\Leftrightarrow R/I$ is gereduceerd.
(4) Toon dat ieder priemideaal een radicaal ideaal is maar dat de omgekeerde implicatie niet waar is.

(5) Toon aan dat $J = (x^2+1) \trianglelefteq \mathbb{R}[x]$ een radicaal ideaal is, maar geen ideaal horend bij een deelverzameling van $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

(6) Stel K algebraisch gesloten, en $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ een niet-constante veelterm. Toon dat:
  (a) $\mathbb{A}^n \backslash V(f)$ is oneindig als $n \geq 1$,
  (b) $V(f)$ is oneindig als $n \geq 2$.
  (c) het complement van elk algebraisch deel (niet gelijk aan $\mathbb{A}^n$) is oneindig.

(7) Toon aan dat

$$(x^2, y) \cap (x-1, y-1) = (x^3 - x^2, x^2y - x^2, xy - y, y^2 - y)$$

als idealen in $K[x,y]$. Is dit een radicaal ideaal?

(8) Stel $\varphi : R \longrightarrow S$ een ringmorfisme, en $I \trianglelefteq S$. Toon aan:
  (a) I radicaal $\Rightarrow \varphi^{-1}(I)$ radicaal,
  (b) I priem $\Rightarrow \varphi^{-1}(I)$ priem,
  (c) I maximaal $\not\Rightarrow \varphi^{-1}(I)$ maximaal.

(9) Stel $I \trianglelefteq R$. Toon aan dat

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \supset I \\ P \text{ prime}}} P.$$

Als $I \trianglelefteq K[x_1, \dots, x_n]$ met K algebraisch gesloten, toon dan aan dat

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supset I \\ \mathfrak{m} \text{ maximal}}} \mathfrak{m}.$$

(10) Stel $I \trianglelefteq R$ en $I \neq R$. We zeggen dat een priemideaal $P \trianglelefteq R$ minimaal is over I als $I \subset P$ en er bestaat geen priemideaal $Q \trianglelefteq R$ zodat $I \subset Q \subsetneq P$.
  (a) Toon aan: er bestaat een minimaal priemideaal boven I.
  (b) Bepaal de minimale priemidealen boven $(x^2y, xy^2) \trianglelefteq K[x,y]$.

(11) Vind de kernen van de volgende $\mathbb{C}$-algebramorfismen:
  (a) $f : \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[t] : x \mapsto t^2, y \mapsto t^5$
  (b) $g : \mathbb{C}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{C}[t,s] : x \mapsto t^2, y \mapsto ts, z \mapsto s^2$
  (c) $h : \mathbb{C}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{C}[t] : x \mapsto t^2, y \mapsto t^3, z \mapsto t^4$

1.3. Integrale uitbreidingen en Noethers normalisatielemma

(1) Is $K[x_1, \dots, x_n]$ eindig voortgebracht als K-moduul? Als K-algebra?

(2) Stel $R \subset S \subset T$ ringen. Toon aan: S is integraal over R en T is integraal over $S \Rightarrow T$ is integraal over R.

(3) Veronderstel $R \subset S$ ringen en S eindig voortgebacht als R-algebra. Toon aan: S is eindig over $R \Leftrightarrow S$ is integraal over R.

(4) Stel K een algebraisch gesloten lichaam, en $K \subset L$ voor een lichaam L. Toon aan dat ieder element van L dat algebraisch is over K reeds in K zit. Toon ook aan: L eindig over $K \Rightarrow K = L$.

(5) Pas Noethers normalisatielemma toe op volgende voorbeelden:
   (a) $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$
   (b) $\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3)$
   (c) $\mathbb{C}[x,y,z]/(xy+z^2, x^2y-xy^3+z^4-1)$
   (d) $\mathbb{C}[x,y,z]/(xyz-1)$

1.4. Hilberts Nullstellensatz

(1) Stel $f, g \in K[x,y]$ twee veeltermen zonder gemeenschappelijke factoren. Toon aan:
   (a) de doorsnede $V(f) \cap V(g) \in \mathbb{A}^2$ is eindig (hint: gebruik dat voor een UFD R met breukenlichaam $Q(R)$, twee veeltermen die geen gemeenschappelijke factoren hebben in $R[x]$ ook geen gemeenschappelijke factoren in $Q(R)[x]$ hebben (zie cursus ring- en moduultheorie)),
   (b) als f irreducibel is, en $V(f)$ is oneindig, dan is $I(V(f)) = (f)$.

(2) Stel $Y = V(y-x^2) \subset \mathbb{A}^2$. Toon dat $A(Y)$ isomorf is met een veeltermring in 1 veranderlijke.

(3) Stel $Z = V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2$. Toon dat $A(Z)$ niet isomorf is met een veeltermring in 1 veranderlijke.

(4) Geef een voorbeeld van een aftelbare verzameling algebraische delen waarvan de unie niet algebraisch is.

1.5. De Zariski topologie

(1) Toon aan dat een Zariski gesloten deel $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ ook gesloten is in de Euclidische topologie.

(2) Stel $X \subset \mathbb{A}^n$. Toon aan dat $V(I(X)) = \overline{X}$.

(3) Stel X een irreducibele topologische ruimte, en $U, V \subset X$ niet-lege open delen. Toon aan:
   (a) $U \cap V \neq \varnothing$
   (b) $\overline{U} = X$: we zeggen dat U dicht is in X.

(4) Een topologische ruimte heet quasi-compact als iedere open overdekking een eindige deeloverdekking heeft. Toon aan dat een noetherse topologische ruimte quasi-compact is.

(5) Stel $Y = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in K\}$. Toon aan dat Y een affiene varieteit is door $A(Y)$ te berekenen. Deze kromme staat bekend onder de naam 'twisted cubic curve'.

(6) Toon aan: iedere algebraische verzameling $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ is te schrijven als nulpuntenverzameling van 1 enkele veelterm.

(7) Stel $Y \subset \mathbb{A}^3$ de algebraische verzameling bepaald door de veeltermen $x^2 - yz$ en $x - xz$. Ontbind Y in irreducibele componenten.

(8) Ontbind $V(x^2+y^2-1, x^2+z^2-1) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ in irreducibele componenten.

(9) Geef een voorbeeld van een irreducibele veelterm $f \in \mathbb{R}[x,y]$ zodat $V(f)$ niet irreducibel is.

(10) Ontbind in irreducibele delen:
   (a) $V(xy^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$
   (b) $V(x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$
   (c) $V(xyz - 1) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$
   (d) $V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$
   (e) $V(y - f(x)) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ met $f(x) \in \mathbb{C}[x]$
   (f) $V(y^2 - x(x^2 - 1)) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$
   (g) $V(x_1 x_2 \cdots x_n) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$

1.6. Krull dimensie

(1) Toon dat het ideaal $I = (xy, xz, yz) \trianglelefteq \mathbb{C}[x, y, z]$ niet door minder dan 3 elementen voortgebracht kan worden. Wat is de nulpuntenverzameling van I?
(2) Bereken de dimensie van:
   (a) een lichaam L,
   (b) een hoofideaaldomein R dat geen lichaam is,
   (c) de algebraische verzameling $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$.
(3) Stel $R = K[x, y, s, t]/(xs - yt)$ en $S = R/(x, y)$. Als $\mathfrak{p} = (s, t) \subset R$, toon dan $\mathsf{ht}_R(\mathfrak{p}) = 1$ maar $\mathsf{ht}_S(\mathfrak{p}S) = 2$. Denk ook na over een meetkundige interpretatie hiervan.
(4) Toon aan: als $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ de irreducibele decompositie is van een noetherse topologische ruimte, dan geldt

$$\dim(X) = \max\{\dim(X_i) \mid i = 1, \ldots, r\}.$$

Leid hieruit af dat als $X = Z_1 \cup \cdots \cup Z_k$ een decompositie is met alle Z_i gesloten (niet noodzakelijk irreducibel):

$$\dim(X) = \max\{\dim(Z_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$$

HOOFDSTUK 2

Reguliere functies en morfismen

2.1. Reguliere functies

(1) Stel $f : R \longrightarrow S$ een ringmorfisme. Voor een ideaal $J \trianglelefteq S$, is $f^{-1}(J)$ een ideaal dat we de contractie van J noemen, en J^c noteren. Als $I \trianglelefteq R$, dan kunnen we het ideaal voortgebracht door $f(I)$ beschouwen. Dit noteren we I^e en noemen we de extensie van I. Toon aan:
   (a) $I \subset (I^e)^c$
   (b) $J \supset (J^c)^e$
   (c) $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$ voor $I_1, I_2 \trianglelefteq R$
   (d) $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$ voor $J_1, J_2 \trianglelefteq S$

(2) Stel S een multiplicatief gesloten deel van een ring R, en beschouw het ringmorgisme $f : R \longrightarrow S^{-1}R$. Toon aan:
   (a) voor ieder ideaal $I \trianglelefteq R$ geldt dat $I^e = \{\frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S\}$.
   (b) voor ieder ideaal $J \trianglelefteq S^{-1}R$ geldt dat $(J^c)^e = J$
   (c) Contractie en extensie geven aanleiding tot bijecties

$$\begin{array}{c}\{\text{priemidealen in } S^{-1}R\} \\ {\scriptstyle (-)^e}\big\uparrow\big\downarrow{\scriptstyle (-)^c} \\ \{\text{priemidealen } I \text{ in } R \text{ met } I \cap S = \varnothing\}\end{array}$$

   (d) Wat zegt deze bijectie in het geval S het complement van een priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ is?

(3) Stel R een commutatieve ring. Zijn de volgende uitspraken waar of niet waar?
   (a) R is een domein $\Leftrightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ is een domein voor ieder priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$
   (b) R is gereduceerd $\Leftrightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ is gereduceerd voor ieder priemideaal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$

2.2. Reguliere morfismen

(1) Stel $X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ en beschouw de afbeelding

$$f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow X : t \mapsto (t^2, t^3).$$

Toon aan dat f een bijectief regulier morfisme is, maar geen isomorfisme. Kun je hier een meetkundige interpretatie voor vinden?

(2) Een affiene kegelsnede is de nulpuntsverzameling in $\mathbb{A}^2$ van een enkele irreducibele veelterm van graad 2 in $K[x,y]$. Toon dat iedere affiene kegelsnede isomorf is met $X_1 = V(xy-1)$ of met $X_2 = V(y-x^2)$ via een isomorfisme gegeven door een lineaire coordinatentransformatie gevolgd oor een translatie.

(3) Stel $f : X \longrightarrow Y$ een morfisme tussen affiene varieteiteiten. Waar of niet waar:
   (a) f is surjectief $\Leftrightarrow$ f^* is injectief,
   (b) f is injectief $\Leftrightarrow$ f^* is surjectief,
   (c) als $f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ een isomorfisme is, dan bestaan er $a, b \in K$ zodat $f(x) = ax + b$,
   (d) als $f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ een isomorfisme is, dan bestaan er $A \in M_2(K)$ en $b = (b_1, b_2) \in K^2$ zodat $f(x) = Ax + b$,

(4) Welke van de volgende quasi-affine varieteiten zijn isomorf over $\mathbb{C}$:
   (a) $\mathbb{A}^1 \backslash \{1\}$
   (b) $V(x^2 + y^2) \subset \mathbb{A}^2$
   (c) $V(y - x^2, z - x^3) \backslash \{0\} \subset \mathbb{A}^3$
   (d) $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$
   (e) $V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2$
   (f) $V(x^2 - y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$

HOOFDSTUK 3

Projectieve variëteiten

3.1. Projectieve algebraïsche verzamelingen

(1) Stel $a \in \mathbb{P}^n$. Toon aan dat $\{a\}$ een projectieve algebraïsche verzameling is, en bereken expliciete generatoren van $I_p(\{a\}) \trianglelefteq K[x_0, \ldots, x_n]$.
(2) Stel $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2$ (respecttievelijk $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}^2$) drie niet-collineaire punten. Toon aan dat er een projectieve coördinatentransformatie $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ bestaat zodat $f(p_i) = q_i$ voor $i = 1, \ldots, 4$. Wat in het geval van 4 punten die drie aan drie niet collineair zijn?
(3) Een willekeurige verzameling $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ noemen we een kegel als $0 \in X$, en als $\forall \lambda \in K, x \in X : \lambda x \in X$. Voor zo'n kegel X definiëren we

$$\mathbb{P}(X) := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid (x_0, \ldots, x_n) \in X\} \subset \mathbb{P}^n$$

de projectivisatie van X. Toon aan dat $\mathbb{P}(-)$ een bijectie met inverse $C(-)$ definiëert tussen kegels in $\mathbb{A}^{n+1}$ en projectieve algebraïsche verzamelingen in $\mathbb{P}^n$. Toon ook aan dat voor een projectieve algebraïsche verzameling $X \subset \mathbb{P}^n : S(X) = A(C(X))$.
(4) Toon aan dat iedere projectieve algebraïsche verzameling geschreven kan worden als V_p van eindig veel veeltermen van dezelfde graad.

3.2. De Zariski topologie

(1) Stel $\{U_i \mid i \in I\}$ een open overdekking van een topologische ruimte X. Toon aan:
   (a) als $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ voor alle $i, j \in I$, en alle U_i zijn irreducibel, dan is ook X irreducibel,
   (b) $\dim X = \sup\{\dim U_i \mid i \in I\}$,
   (c) $\mathbb{P}^n$ is irreducibel, en $\dim(\mathbb{P}^n) = n$.
(2) (a) Toon aan dat een gegradeerde ring R een domein is als en slechts als voor alle homogene elementen $f, g \in R$ geldt dat $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ of $g = 0$.
   (b) Toon aan dat een projectieve algebraïsche verzameling X irreducibel is als en slechts $S(X)$ een domein is.
(3) Bereken de homogenisatie van het ideaal $I = (x_1, x_2 - x_1^2) \trianglelefteq K[x_1, x_2]$.

3.3. Reguliere functies en morfismen

(1) Beschouw de kwadriek $X = V_p(x_0x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{P}^2$, en toon aan dat de afbeelding

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto \begin{cases} (x_1 : x_2) & \text{als } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1 : 0 : 0) \\ (x_0 : x_1) & \text{als } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0 : 0 : 1) \end{cases} \end{aligned}$$

goed gedefinieerd is, en een regulier morfisme is. Toon verder aan dat f zelfs een isomorfisme is met inverse

$$f^{-1} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X : (y_0 : y_1) \mapsto (y_0^2 : y_0y_1 : y_1^2).$$

Kun je hier een tekening bij maken?

(2) Stel $X \subset \mathbb{P}^2$ een projectieve kegelsnede, i.e. $X = V_p(f)$, met $f \in K[x_0, x_2, x_2]$ irreducibel van graad 2. Van Oefening 2.2(2) weten we dat $X \cap \mathbb{A}^2$ isomorf is met $V_a(x_2 - x_1^2)$ of met $V_a(x_1x_2 - 1)$ door een lineaire transformatie gevolgd door een translatie. Breid dit isomorfisme uit tot een automorfisme van $\mathbb{P}^2$, en gebruik de vorige oefening om aan te tonen dat $X \cong \mathbb{P}^1$.

(3) Toon aan de hand van een voorbeeld aan dat de homogene coördinaat algebra niet invariant is onder isomorfisme, i.e. construeer projectieve algebraïsche verzamelingen X, Y zodat $X \cong Y$ maar $S(X) \ncong S(Y)$.

(4) Bewijs Gevolg 4.4.3 uit de cursus.

HOOFDSTUK 4

De Stelling van Bézout

4.1. Hilbertfuncties

(1) Bereken de Hilbertfunctie van:
   (a) het ideaal $I = (x_0^2 x_1^2, x_0^2)$ in $K[x_0, x_1]$,
   (b) twee snijdende rechten in $\mathbb{P}^3$,
   (c) twee niet-snijdende rechten in $\mathbb{P}^3$.

4.2. Hilbert veeltermen

(1) Stel R een PID. Bewijs dat ieder primair ideaal $I \trianglelefteq R$ van de vorm $I = (p^n)$ is, met p irreducibel.
(2) Stel $I \trianglelefteq R$ een primair ideaal in een ring R. Toon aan dat $\sqrt{I}$ een priemideaal is.
(3) Stel $X \subset \mathbb{P}^n$ een projectieve algebraïsche verzameling, met irreducibele componenten X_i. Toon aan dat er een hypervlak $V \subset \mathbb{P}^n$ bestaat dat geen enkele van de X_i bevat.

4.3. De stelling van Bézout

(1) Toon aan:
   (a) als R een eindig-dimensionale K-algebra is en een domein, dan is $R \cong K$.
   (b) als X een affiene of projectieve algebraïsche verzameling is en $\dim(X) = 0$ dan is X eindig.
(2) Stel $C \subset \mathbb{P}^2$ een kromme (i.e. een projectieve algebraïsche verzameling met irreducibele componenten van dimensie 1). Toon aan dat $C = V_p(f)$, voor een homogene veelterm $f \in K[x_0, x_1, x_2]$.
(3) Stel R een ring met multiplicatief gesloten deel S, en $I \trianglelefteq R$ een ideaal. Toon aan dat

$$S^{-1}R/S^{-1}I \cong \bar{S}^{-1}(R/I),$$

waarbij $\bar{S}$ het beeld van S is in R/I.
(4) Stel $X \subset \mathbb{A}^n$ een affiene varïeteit, en $I(X) \subset J \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$. Toon aan dat er voor $p \in X$ een isomorfisme

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,p}/J\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,p} \cong \mathscr{O}_{X,p}/J'\mathscr{O}_{X,p}$$

bestaat, met J' het beeld van J onder het quotientmorfisme

$$K[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow A(X).$$

(5) Toon aan: iedere irreducibele kromme $C \subset \mathbb{P}^2$ van graad 1 is isomorf met $\mathbb{P}^1$.

(6) Stel $C \subset \mathbb{P}^n$ een irreducibele kromme van graad d. Toon aan dat C in een lineaire deelruimte van dimensie d zit.